QUADERNO N. 16

SERIE: I QUADERNI DELLA VALTIBERINA TOSCANA

Atti di convegni, studi, ricerche, saggi, testi poetici, narrativi, teatrali a cura di docenti e/o studenti, in collaborazione con le istituzioni scolastiche, civili e culturali del territorio

Liceo Città di Piero

Mario Pancrazi, Fra Luca Pacioli
e il fascino delle «matematiche»

a cura di Francesca Buttazzo

Sansepolcro 2005

Il Quaderno è pubblicato grazie al contributo della KEMON GROUP PROFESSIONAL BEAUTY EVOLUTION

NOTA DELLA REDAZIONE

Si ripubblica il volume di Mario Pancrazi (*Luca Pacioli, la "Summa" e la matematica del '400,* Arti Grafiche, Sansepolcro, 1992), a dieci anni dalla morte del caro Professore di Matematica del Tecnico Commerciale "Fra Luca Pacioli".
Si ristampano, per l'occasione, la vita di *Fra Luca dal Borgo S. Sepolcro* (scritta da Bernardino Baldi nel 1589) e il saggio di Enrico Giusti/Carlo Maccagni, *Luca Pacioli a Borgo San Sepolcro. Un uomo del Rinascimento*, edito da Giunti a Firenze nel 1994.

In copertina: *Ritratto di Fra Luca Pacioli* dipinto da Jacopo de Barbari nel 1495 (Museo Nazionale di Capodimonte, Napoli), logo del Centro Studi "Mario Pancrazi" di Sansepolcro. E' un olio di incerta attribuzione. Del veneziano de Barbari o di un pittore urbinate o di uno spagnolo influenzato da veneziani o – addirittura – è una copia di un prototipo perduto, eseguito dal maestro e amico Piero della Francesca? Raffigura Luca Burgensis? Sembra di sì. Dai riferimenti alla *Summa*: i due poliedri, la scritta sul taglio del volume. Dai riferimenti ad Euclide: il vol. aperto dell'ultimo libro degli *Elementi*, il nome del matematico sul bordo della lavagna, su cui è riportato un teorema. Il "mistero" investe anche il giovane raffigurato alla sinistra del frate. Chi è? Forse Guidobaldo duca di Urbino (1472-1508) a cui Luca dedica la prima edizione a stampa della *Summa* (Tip. Paganino de Paganini, Venezia, 1494). Di rilievo gli oggetti sul tavolo: calamaio, astuccio, spugna, gesso, goniometro, compasso.

In redazione: Matteo Martelli, Giuliana Maggini, Enzo Papi, Gabriella Rossi

Supplemento al periodico "Bibliomedia" del Liceo "Città di Piero"
(Autorizzazione del Tribunale di Arezzo , V.G. n°611 – Registro Stampa n. 9/2001)

Direttore Responsabile: Matteo Martelli

Stampa: Tipografia l'Artistica Selci Lama (PG)

Novembre 2005

INDICE

Alessio Ugolini*

Prefazione

Mario Pancrazi è stato, dal 1974 al 1995, apprezzato docente di Matematica presso l'Istituto Tecnico Commerciale "Fra Luca Pacioli", uno dei due istituti storici, assieme al Liceo Scientifico "Piero della Francesca", che con la loro unificazione hanno dato vita al Liceo Scientifico – Linguistico - Commerciale "Città di Piero".

La sua opera educativa ha contribuito alla formazione di generazioni di alunni e, in particolare, all'avvio dell'introduzione dell'informatica nell'Istituto Tecnico Commerciale.

Non a caso alla memoria del prof. Pancrazi, scomparso 10 anni fa, è stato intitolato nel 2003 il Laboratorio di Informatica della sede di Via Piero della Francesca.

Al suo nome è intitolata la Borsa di studio "Mario Pancrazi", destinata a studenti del Tecnico commerciale che siano iscritti al primo anno di università.

Quindi, l'autore, a cui è intitolata la pubblicazione e a cui mi onoro di dedicare queste righe, è un insigne personaggio, che illustra la storia recente della nostra città.

Vi è poi l'affascinante tema del Quaderno, dedicato all'altro concittadino, Fra Luca Pacioli, allievo del sommo Piero della Francesca, pittore e matematico, ed egli stesso matematico insigne dell'epoca rinascimentale, autore della *Summa de Arithmetica Proporzioni et Proportionalità*, docente all'Università "La Sapienza" di Roma, amico e collaboratore di Leonardo da Vinci.

Davvero un importante saggio, rivolto alla storia e al tempo stesso infinitamente moderno, vista l'importanza sempre crescente che la scienza, e la matematica che ne è parte fondamentale, assumono nella società contemporanea.

La città di Sansepolcro dovrà celebrare degnamente, nel 2009, il cinquecentenario della pubblicazione del *De Divina Proportione.*

Al tempo stesso dovrà alacremente perseguire il proprio ruolo di centro di studi, sempre più specializzati, nel campo scientifico.

Simili finalità animano la significativa iniziativa del Liceo, cui la città di Piero non può che tributare, anche nella presente occasione, un sentito ringraziamento.

* Sindaco di Sansepolcro

Matteo Martelli*

Presentazione

Mario Pancrazi è stato docente per venti anni nell'ITC "Fra Luca Pacioli" di Sansepolcro[1]. Il 25 settembre 2005 è stato celebrato il decennale della morte, avvenuta in una fase in cui aveva raggiunto significativi risultati nel suo impegno di docente, di organizzatore della vita scolastica, di formatore e di studioso. Dal 1974 – come ricordano Giuliana Maggini e Marinella Acquisti nell'attenta e commossa ricostruzione della vita del professore – era passato ad insegnare Matematica applicata nel Commerciale di Sansepolcro, dopo una breve esperienza di ricerca all'Università di Pisa, un passaggio di qualche mese presso una locale ditta di confezioni, un anno di insegnamento nell'ITIS "G. Galilei" di Arezzo. In venti anni si era fatto apprezzare e amare da studenti e genitori, da colleghi e superiori per le grandi qualità di uomo rispettoso dell'identità altrui, di docente dotato di umanità, rigore e competenza, e di studioso attento alla storia culturale e scientifica della propria terra. Dal 1976 ha svolto ininterrottamente la funzione di vicepreside, partecipando con entusiasmo e creatività all'elaborazione e all'organizzazione dell'offerta formativa, alla promozione e all'affermazione dell'Istituto "Pacioli", che in quegli anni si è distinto, nel panorama regionale e nazionale, e si è qualificato come centro di istruzione e di formazione, capace di innovazione nella ricerca didattica. L'introduzione dell'informatica nell'insegnamento secondario, l'esperienza dell'alternanza scuola-lavoro, l'elaborazione e la sperimentazione del curricolo IGEA hanno ricevuto l'apporto decisivo della sua intelligenza e della sua passione per i percorsi di critica e di innovazione delle pratiche didattiche. Anche nella comunità cittadina ha lasciato tracce indelebili: nella vita pubblica, nel tessuto organizzativo della politica, nell'associazionismo e, soprattutto, negli ambienti legati alla storica società dei balestrieri e all'affascinante tradizione del Palio.

---

[1] Dal 1999 l'istituto è confluito – insieme al Liceo scientifico e linguistico "Piero della Francesca" – nella nuova istituzione scolastica denominata Liceo "Città di Piero".

Subito dopo la morte, nel 1995 i suoi amici e alcuni soggetti ed enti del territorio hanno proposto al preside del "Pacioli" di istituire una borsa di studio, in memoria di Mario Pancrazi, da assegnare ogni anno al migliore studente diplomato a "Ragioneria" ed iscritto ad una facoltà tecnica o scientifica[2]. La borsa di studio, che quest'anno verrà assegnata nel tradizionale ultimo sabato prima delle ferie natalizie, è la testimonianza vivente della memoria che la scuola, gli amici, i docenti, gli enti, le associazioni, la città conservano del professore e dello studioso. Il 24 maggio 2005 è stato fondato il Centro Studi intestato a Mario Pancrazi[3] che persegue – come finalità principale – la promozione della cultura delle matematiche, quella cultura a cui il professore ha dedicato le migliori energie da insegnante e da ricercatore.

All'apice degli studi avviati fin dall'Università si colloca il saggio che si ripubblica in questo quaderno, per concessione della moglie, Prof.ssa Rosanna Valori, e dei figli Francesco e Roberto, e che costituisce il contributo scientifico offerto da Pancrazi alla conoscenza, allo studio e all'interpretazione di una delle più significative opere di Luca Pacioli.

Osserva Sergio Casini – nel suo limpido e rigoroso commento alla "divina proporzione" – che il "phigreco", "definito rapporto aureo", è "per Pacioli quasi un marchio di Mistero sulla realtà". Si riscontra "nella maggior parte delle forme naturali, nell'arte, nell'architettura, nella musica, nei rapporti delle distanze tra i pianeti e il sole". Attraverso la sezione aurea è possibile interpretare la realtà, scoprirne le leggi, cogliere la bellezza e la verità della natura. E proprio Pancrazi "ha sempre associato la matematica alla bellezza e la bellezza alla verità". Niente sfugge ai rapporti aurei di Pacioli. Non sfugge l'architettura, né la musica e neppure la poesia. In natura le forme "si ripetono in modo costante" e ciò consente letture e scoperte inaspettate. Basta saper osservare, leggere, raccogliere i dati e restare ad essi fedeli. Con la consapevolezza che la "cosa più incomprensibile è che l'Universo che ci circonda sia comprensibile" (A. Einstein – L. Infeld).

---

[2] Dal 1996 al 2004 sono state assegnate 9 borse di studio: 1996 – Miriam Pernici; 1997 – Luana Leopardi; 1998 – Giovanni Caprini; 1999 – Elisa Boncompagni; 2000 – Cinzia Mariani; 2001 – Moira Bianchi; 2002 – Assunta Lorena Salerno; 2003 – Manuela Calabresi; 2004 – Lisa Calchetti.

[3] Cfr. Centro di Studi "M. Pancrazi" e il sito www.centrostudimariopancrazi.it

La *Summa* è un'opera capitale nella storia della matematica. Come scrivono Enrico Giusti e Carlo Maccagni nella loro bella biografia del frate di Sansepolcro, è "il primo e l'unico testo di matematica di un autore coevo a essere stampato entro il 1500" (uno dei tremila incunaboli veneziani) ; ebbe "una diffusione senza pari" come "enciclopedia di tutto il sapere matematico": per la matematica moderna ha costituito "il nuovo punto di partenza". Oggi è abbastanza condivisa (lo ripetono gli studiosi citati, lo ribadisce nella preziosa *Postfazione* di Roberto Manescalchi) l'idea che Pacioli abbia fatto largo uso dei manoscritti e delle opere che aveva a disposizione, a cominciare ovviamente da quelle di Piero della Francesca ampiamente "saccheggiate": nella *Summa* sono riportati ampi brani del *Trattato d'abaco.* Ma è l'intera matematica, da Fibonacci in poi, che si trova compendiata nel libro del frate del Borgo. Nella *Summa* confluiscono:

a. l'esperienza di insegnante a Venezia, a Siena, a Firenze, a Perugia, a Roma, a Milano: le scuole d'abaco erano vere e proprie istituzioni di istruzione e di formazione per i mercanti;

b. le conoscenze che aveva acquisito a contatto con geni come Piero e Leonardo:

c. i bisogni che aveva registrato nelle case, nelle botteghe e nelle scuole dei mercanti che aveva frequentato.

Il merito di Luca Pacioli consiste soprattutto nella divulgazione delle conoscenze matematiche acquisite fino a quel momento in Occidente e nella lungimiranza per averle applicate alla vita quotidiana e alle necessità dei mercanti e del sistema dei commerci nell'Europa dei secoli XV e XVI. La stessa "partita doppia", per cui Pacioli è giustamente noto in tutto il mondo (dal Giappone alla Cina, dall'Australia all'Europa alle Americhe) non è altro che la sistemazione "didattica" e la divulgazione di una "pratica" già conosciuta da tempo nelle piazze e nei mercati di Venezia, Firenze e Genova: era chiamata "alla veneziana".

Il *De Divina Proportione* è la seconda grande opera del frate del Borgo. È pubblicata a Venezia nel 1509 con una cura editoriale che ne fa un libro d'arte nella storia della stampa italiana[4]. Oltre al valore estetico, è opportuno sottolineare

[4] Per la storia della stampa e del libro in Italia cfr. l'*Introduzione* di Armando Petrucci a: L.FEBVRE-H.J. MARTIN, *La nascita del libro,* Laterza, Bari, 1977. Vedi anche l'edizione

che l'opera è stata fondamentale per la divulgazione della geometria nel Cinquecento ed, in particolare, per la definizione della "sezione aurea". Un'ampia parte del libro, illustrata con disegni da Leonardo da Vinci, è dedicata allo studio dei poliedri. Anche in questo caso Pacioli fa largo uso dell'opera di Piero: in particolare, riporta di sana pianta il suo trattato di architettura (*Tractato delarchitectura*)[5] e il suo *Libellus de quinque corporibus regolaribus.* Attratto dal fascino dei poliedri il frate del Borgo dà notizie importanti su alcune questioni algebriche di cui Piero aveva intuito soluzioni che precorrevano di secoli le risposte dalla ricerca scientifica. Al *De Divina Proportione* , in occasione del cinquecentenario della sua pubblicazione, nel 2009 il Liceo "Città di Piero" e il Centro Studi "Mario Pancrazi" dedicheranno un convegno di studi. Pacioli e Piero saranno al centro del confronto tra studiosi e ricercatori. Parteciperanno anche le scuole del territorio. Ancora una volta Sansepolcro ricorderà i suoi figli più illustri: Luca Pacioli, straordinario maestro itinerante nelle scuole d'abaco dell'Italia del Quattrocinquecento e grande divulgatore delle "matematiche"; Piero della Francesca, superbo genio della matematica e impareggiabile "pittore della luce".

Il Quaderno è curato da Francesca Buttazzo, giovane docente di matematica, già allieva del liceo scientifico di Sansepolcro, che ha curato anche la *Bibliografia* degli scritti di e su Pacioli, facendo la spola tra Sansepolcro e Firenze, visitando biblioteche e consultando studiosi. Il contributo della Buttazzo è il risultato del lavoro svolto con passione e abnegazione ed insieme un atto di omaggio a Luca Pacioli "divulgatore delle matematiche": nella consapevolezza che il sapere matematico è "poliedrico". Ispira le grandi avventure del pensiero e della ricerca teorica. Offre idee e strumenti per affrontare la concretezza della vita, praticare "le scienze, i mestieri e le arti", avviare a soluzione i problemi del quotidiano.

---

anastatica (1970) della *Summa de Aritmetica Geometria Proporzioni et Proporzionalità,* a cura della Casa editrice Guanda di Parma, riprodotta in 200 esemplari numerati, e quella del *De Divina Proportione,* realizzata dall'Associazione fra le Casse di Risparmio Italiane, con *Introduzione* di Augusto Marinoni, pubblicata nel 1982 presso la Silvana Editoriale di Roma (riproduzione integrale in facsimile del codice conservato presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano).

[5] Cfr. a questo proposito la *Postfazione* di Manescalchi alla fine di questo quaderno.

* È dirigente scolastico del Liceo "Città di Piero". Nato a S. Marco in Lamis (FG) il 29 nov. 1942, dopo aver frequentato il Liceo classico "Pietro Giannone" della città natale, ha studiato a Urbino, dove si è laureato – relatore Claudio Varese - con una tesi su Nievo (cfr. il saggio *Due momenti dell'ideologia nieviana*, in "Belfagor", f. V, 1970), e, negli ani Settanta, ha svolto attività di ricerca letteraria presso l'Università di Firenze e l'Università di Siena. Ha coltivato gli studi letterari e l'interesse per le arti figurative negli anni Ottanta e Novanta (cfr. il vol. *Arezzo. Guida storico-artistica,* Aretia, 1982). Ha collaborato e collabora a riviste e periodici di cultura. Ha svolto e svolge attività di ricerca, formazione e consulenza per le Università (Siena, LUISS) e per il MIUR (Monitoraggio dell'Autonomia, R.I.So.R.S.E.).

Giuliana Maggini e Marinella Acquisti*

Dalla matematica all'informatica Notizie sulla vita di Mario Pancrazi

> *Parlava con estrema naturalezza e vivacità di ogni argomento […]esprimendo quella gioiosa partecipazione che apparteneva, nel suo animo, ad ogni attimo della vita: la vita – abbiamo detto – come luogo dove imprimere festosamente ma anche ininterrottamente, i segni personali della propria presenza.*

Sono parole della "memoria" di Giorgio Alberti, collega di Pancrazi al Tecnico Commerciale, letta quando fu assegnata la prima Borsa di studio intestata a Mario l'anno dopo la sua morte, avvenuta il 25/09/1995. Alla base della sua esistenza, dunque, c'è l'intensa partecipazione alla vita, che presto l'avrebbe tradito, da inventare con la profondità della persona e la vivacità della mente.

La sua esistenza di neanche cinquant'anni, interrotta come per una sorte invidiosa, ebbe inizio nel 1946, il 17 Agosto, nel podere detto "Loretino", in una famiglia di mezzadri, una di quelle famiglie aperte della campagna toscana in cui neanche un figlio unico poteva soffrire di solitudine e che lo sviluppo dei decenni successivi alla guerra avrebbe superato come realtà d'altri tempi.

Mario crebbe ai "Battistoni", dove i Pancrazi si erano trasferiti nel '48. La vita in campagna voleva dire un'infanzia che, come quella di molti, ha conosciuto le ristrettezze economiche e, allo stesso tempo, le corse in bicicletta per andare a scuola o esplorare i dintorni del Borgo, passione che gli rimase nel piacere degli sport a contatto con la natura. Significava legami solidi e radicamento nella propria terra, che si sarebbero armoniosamente combinati con gli orizzonti nuovi e i nuovi interessi di una persona sensibile e intelligente. Egli amava lo studio per lo studio ma ne intuiva anche il valore per il raggiungimento di una piena umanità e anche del riscatto sociale, e la possibilità di una presenza diversa nella vita civile: una educazione che ancora non apparteneva a tutti ma che cominciava decisamente ad imporsi per i ragazzi ritenuti più meritevoli, suggerita dalle trasformazioni e dai nuovi stimoli di un miracoloso dopoguerra.

Per questo motivo i genitori di Mario non gli fecero frequentare la Scuola di Avviamento Professionale, destinata a chi doveva operare nel mondo del lavoro, bensì la Scuola Media Inferiore, cui ancora si accedeva con un esame di ammissione, quindi il Liceo Scientifico di Sansepolcro, nonostante essi desiderassero per lui una via più breve per la sistemazione futura, come l'Istituto magistrale. Si lasciarono convincere dal proprietario del fondo su cui lavoravano, persona aperta e disposta a sostenerli, a tentare per il loro unico figlio la nuova avventura di uno studio che l'avrebbe condotto all'Università, con il timore nascosto della novità. Stavano nobilmente accettando una scommessa sull'avvenire e forse sfidando una mentalità contadina in declino ma ancora resistente. L'Università fu quindi affrontata con molte preoccupazioni, soprattutto di carattere economico, in parte alleviate dal presalario e dalla responsabilità di Mario nel gestire i soldi.

Fu così che egli si laureò in Scienze Matematiche a Pisa nel '69, con una tesi di Analisi matematica. All'Università rimase come assistente del suo professore fino al '72, quando il servizio militare, a Palermo e poi a Padova, unito a vicende diverse, non interruppe questo rapporto. La strada dello studio e della ricerca unita all'insegnamento, che aveva cercato di intraprendere, si era praticamente chiusa, ma soltanto in una delle sue forme. Mario era ormai entrato in quel mondo fatto di numeri e misteriosi rapporti, di matematiche applicate a nuove tecnologie, precluso a molti, se non ai più, una passione che condivise con la moglie Rosanna e che trasmise ai figli Francesco e Roberto.

Dice ancora l'Alberti : *….mi piaceva sentirlo parlare di storie dove protagonisti sono i numeri: di quelle storie che si trasformano di tanto in tanto da semplici giochi in alte voci di una pagina filosofica...*

E aggiunge: *Quando ricorrevo a lui per qualche spiegazione di carattere scientifico (…) egli, per quella capacità che appartiene a chi si muove da gran padrone nel campo di conoscenze saldamente possedute, sapeva rendere semplice, e perciò subito comprensibile, ogni complesso o anche complicato concetto.*

Questa dimensione lo qualifica come eccellente insegnante, capace di interagire con gli studenti per un tratto nuovo, poco cattedratico, nella maniera di porsi e di presentare la disciplina[1].

---

[1] Mario sapeva voler bene ai suoi studenti, in quanto studenti e in quanto giovani da istruire ed educare. Quando nel '74 si sposò, lui e la moglie, Rosanna Valori, anch'ella insegnante di Matematica, vollero un momento di festa con i loro alunni, rispettivamente del Tecnico

Dunque, continua l'Alberti, *Mario mi sembrò veramente riassumere in sé le qualità del nuovo maestro, e meglio direi: dell'"uomo nuovo", uscito da una temperie di cui aveva sentito parlare e da quella che ne è seguita, e di cui era stato egli stesso – da studente e da insegnante – attento testimone e anche protagonista.*

Dopo aver fatto qualche mese presso una locale ditta di confezioni e un anno di scuola presso l'Istituto Tecnico Industriale di Arezzo, al Commerciale di Sansepolcro Mario giunse nel '74. Qui egli si manifestò come una presenza significativa, capace di imporsi con naturalezza, fonte di stimoli e appassionato indagatore di novità: *una personalità forte, decisa, ricchissima di idee e invenzioni. La sua capacità di esigere serietà nello studio si manifestava senza che si sperdesse il piacere dell'apprendimento, ed essa trovava naturale e quindi spontanea risposta nella stima dei suoi interlocutori che poi erano tutti suoi amici: ragazzi, colleghi; studiosi incontrati via via per motivi diversi.*

Al T.C. Mario Pancrazi entrò come docente di Matematica applicata e lì è rimasto fino all'anno della sua morte. Sulle tracce della sua presenza ancora si cammina e chi è stato suo alunno può ancora dire il piacere di una scuola in cui si apprende dialogando, divertendosi e scoprendo il fascino di materie astruse. Nella sua scuola Mario è stato attivamente presente per il buon funzionamento dell'Istituto, ricoprendo incarichi diversi, tra i quali, ininterrottamente dal '76 in poi, la funzione di Vicario collaboratore del Preside.

Però il lavoro dell'insegnante, come pure l'istituzione stessa della scuola, ha bisogno di rinnovarsi per non cadere in una assorbente e monotona ripetizione di cose ormai possedute e quindi senza novità. La mancanza di curiosità e di sfide spenge l'entusiasmo; subentra *la sonnolenta staticità di una storia dove tutto è scontato, dove non giunge che raramente il soffio di qualche aura più ricca di elementi vitali*. Poteva essere anche di Mario questo rischio, il comodo adagiarsi nel ruolo del trasmettitore del sapere. Ma l'irrequietezza

---

Commerciale e del Liceo Scientifico. Da questo momento data la conoscenza di Mario da parte del Sig. G. Domenico Vaccarecci, allora studente del L.S. e attuale Presidente del Centro Studi «M. Pancrazi». Nonostante la differenza d'età la conoscenza si trasformò in profonda amicizia, rinsaldata dalla comune passione per il *tiro con la balestra*, tradizionale competizione di Sansepolcro.

intellettuale e l'amore mai spento per la ricerca e lo studio, curioso com'era della novità e della sperimentazione, il rapporto con gli alunni per giungere ai quali cercava strade sempre più adeguate, gli hanno consentito di sfuggire alle maglie di un insegnamento ripetitivo, per quanto di qualità. Dentro la scuola si apre una feconda stagione di rinnovamento e, nel campo scientifico, fu introdotta l'informatica che egli fu tra i primi a usare dopo essere stato un autodidatta innamorato delle nuove possibilità. Aderì perciò senza riserve, intuendone le opportunità per una scuola moderna, al Piano nazionale per l'introduzione dell'informatica nell'insegnamento della Scuola Secondaria Superiore. Dopo aver partecipato, nell'a.s. '85/'86, a dei corsi per la qualifica di formatore, ha coordinato e tenuto egli stesso dei corsi per la formazione di insegnanti di Matematica e Fisica per lunghi periodi, dal 1986 all'a.s. '87/'88 e anche in seguito, se pure più saltuariamente. E, naturalmente, riuscì a coinvolgere tutti. A lui risale la tradizione informatica del T.C. che è stato tra i primi in Italia ad adottare la tecnica dei calcolatori come mezzo didattico ed è giunto ad avere, nel 2003, un corso per Programmatori Informatici. Per dare un'idea della vastità dei suoi interessi nell'insegnamento, occorre aggiungere che Mario ha frequentato e tenuto numerosi altri corsi di aggiornamento inerenti la specificità della sua scuola, quali lo sviluppo economico, l'organizzazione del lavoro, il rapporto scuola-lavoro, le problematiche della comunicazione, il Progetto IGEA.

Fu poi la volta di Luca Pacioli a cui dedicò nel 1992 una pubblicazione **Luca Pacioli, la "Summa" e la matematica del '400**, in occasione del cinquecentenario della morte di Piero della Francesca e del prossimo anniversario della prima pubblicazione a stampa della "Summa" (1994). Nella prefazione l'autore dice: *Il libro è rivolto soprattutto ai miei allievi e avrei raggiunto lo scopo se, attraverso esso, almeno qualcuno di loro raggiungesse la convinzione che anche la matematica si può studiare partendo da fatti concreti, non mero studio di formule o acquisizione fredda di teoremi ma consapevolezza che a monte c'è la cultura di chi ci ha preceduto*.

L'interesse per i vari aspetti delle scienze matematiche e per le loro applicazioni era *l'avvio di ulteriori studi che egli avrebbe certamente svolto negli anni venturi* (sappiamo che ha continuato a tradurre e studiare la **Summa** e che forse aveva in mente qualche altro lavoro) se la malattia non fosse giunta a bloccare con la sofferenza ogni attività e ogni desiderio.

Mario Pancrazi era giovane, nel pieno delle forze fisiche e intellettuali, presente in maniera feconda in molte associazioni del suo Borgo con impegno costante. Egli ha speso le sue energie per la sua città, con quella disponibilità di tempo e di denaro, che non è facile trovare insieme in una persona, nella Associazione Balestrieri e nella politica, intese come coinvolgimento responsabile e partecipazione attiva alla società civile. È naturale che gli amici, su proposta del Prof. Giovanni Tricca e con l'adesione di aziende, associazioni, privati, abbiano voluto ricordarlo dopo la sua morte con una borsa di studio intitolata alla sua memoria per premiare gli studenti del T.C. che si fossero distinti per impegno e risultati. Ora la Borsa di Studio diventa un Centro Studi con l'intento generale di promuovere iniziative dirette a valorizzare la cultura delle matematiche e delle scienze nella scuola e nella società, di favorire la ricerca, la sperimentazione e lo sviluppo culturale e professionale, e di concordare progetti di ricerca e di innovazione relativi agli sbocchi professionali con le iniziative promosse da enti e soggetti operanti nel territorio. Il Centro Studi si propone di interpretare e realizzare compiutamente quanto significasse la presenza di Mario nel suo paese, di continuare la sua azione costantemente educativa per il suo modo schietto e diretto di rapportarsi con gli altri. Gli amici[2] parlano con nostalgia di certi episodi apparentemente poco eclatanti, quali le lunghe chiacchierate serene e liberanti in macchina in cui si approfondivano reciprocamente la conoscenza e l'amicizia.

Dal ricordo dei suoi, non è ancora scomparso il periodo della sua malattia, vissuta con riservatezza per non essere causa di maggiore sofferenza, che insieme alla vita lo stava privando della lietezza dell'animo. Dopo, familiari e amici hanno dovuto riprendere la loro strada con la nostalgia di un forte punto di

---

[2] Ci riferiamo ai Sigg.ri G.D. Vaccarecci e Giovanni Tricca che hanno parlato con affetto e nostalgia di lui ricordando episodi e momenti della loro frequentazione.
Così lo ricorda l'amico G. Tricca: *Sono stato collega e amico di Mario per tanti anni, abbiamo condiviso anche una passione, quella del tiro alla balestra con il risultato di essere bersaglio di Roberto Tofi e delle sue caricature.*
Mario sapeva essere un punto di riferimento per la scuola con una sensibilità ed un equilibrio che gli derivava dall'avere con i ragazzi uno straordinario rapporto di fiducia e di reciproca responsabilità.
Ha introdotto l'amore per l'informatica quando ancora i computer erano un miraggio, si accaniva per il progetto di alternanza scuola – lavoro perchè lo considerava un forte stimolo per una scuola volta ad essere al passo con i tempi.
Sapeva essere allo stesso tempo padre e marito esemplare, pronto all'autocritica e a quella ironia che sanno rendere la vita di famiglia certa per forti punti di riferimento, questo era Mario.

riferimento, come naturalmente Mario si poneva. La sua è un'assenza tanto più avvertita quanto più la sua presenza era diventata una consuetudine, quanto più egli era radicato nelle amicizie, per non parlare della famiglia, ed era disponibile anche al più semplice rapporto, con pazienza, sensibilità e sempre col suo sorriso sottilmente ironico. Rapporti in cui le eventuali tensioni si spengevano contro la sua tranquilla solidità e la sua razionalità piegata all'umano. Tuttavia l'impegno e la qualità dell'esistenza non possono prescindere dall'aver incontrato nel proprio cammino qualcuno che, anche senza volere, ha saputo orientare con l'esempio concreto che alla vita si può dare un senso.

Chiudo il ricordo di Mario con un episodio significativo raccontato dall'amico Vaccarecci.

Il 28 Maggio '95, l'anno della sua morte, Mario, già malato e "rotto", come lui stesso ebbe a dire, vinse il Palio a Gubbio. L'anno successivo, secondo le regole della disputa, avrebbe dovuto fare il "capobanco", ma egli non c'era più. Fu posta la sua balestra sul banco ed osservato un minuto di silenzio. Poi la gara ebbe inizio. Con la balestra di Mario tirò per la prima volta un giovane da poco entrato nella Società Balestieri. Vinse con un tiro straordinariamente simile a quello di Mario dell'anno precedente. Fu naturale vedervi un segno e riconoscere la sua presenza tra gli amici che giocavano in suo onore. Mario era ancora lì, tra loro, ed è ancora tra noi.

Ringraziamenti

Si ringraziano

• i genitori di Mario Pancrazi, Giuseppe e Linda, che abbiamo incontrato l'11 Aprile 2005, giorno del loro 65° anniversario di matrimonio, disponibili e lieti, pur nella struggente nostalgia del loro unico figlio; per una loro intima e commovente vicinanza, la moglie, Rosanna Valori, i figli Francesco e Roberto, l'assistente amministrativo del T.C. Piero Banelli

• gli amici Giovanni Tricca e Gian Domenico Vaccarecci.

*** GIULIANA MAGGINI**

È nata 23 nov. 1940 a Sansepolcro. Laureata in Lettere Classiche all'Università di Perugia, dal 1970 al 2000 ha insegnato Italiano e Latino al Liceo Scientifico "Piero della Francesca" della città natale. Ha svolto attività di ricerca e docenza, tenendo lezioni anche presso l'Università dell'Età libera di Sansepolcro. Ha pubblicato, con Luigi Andreini, il *Laudario di Santa Maria della Notte* (Cooperativa Culturale "G. La Pira", Sansepolcro, 1979) e *Sant'Antonio abate a Sansepolcro* (Sansepolcro, 1996) e, con Andrea Borghesi, *Una storia per immagini* sulla Ditta Buitoni (CRAL Buitoni, Sansepolcro, 1988). Ha collaborato e collabora con articoli e saggi a varie riviste e periodici, tra cui i Quaderni della Valtiberina Toscana pubblicati dal Liceo "Città di Piero", "Pagine altotiberine", "l'altrapagina" e "Toscana oggi".

*** MARINELLA ACQUISTI**

È nata l'8 agosto 1945 a Sansepolcro, dove ha studiato presso il locale Liceo scientifico "Piero della Francesca". L'11 nov. 1968 si è laureata in Matematica presso la Facoltà "Ulisse Dini" dell'Università di Firenze con una tesi di analisi matematica e il giorno dopo è stata incaricata di insegnamento (Matematica e Fisica) nel liceo della sua città. Abilitata nel 1970, dopo aver vinto il concorso nel 1982 (si è classificata 3^ a livello nazionale), ha continuato ad insegnare al liceo scientifico di Sansepolcro, dove tuttora è docente nel triennio, sezione B. Dal 2000 è nello staff dirigenziale del Liceo "Città di Piero".

Parte Prima

La «Summa» di Fra Luca Pacioli

MARIO PANCRAZI

Via dei Cipolli, dove è nato Luca Pacioli

Luca Pacioli, la «Summa» e la matematica del ’400

A Roberto e Francesco

PREFAZIONE

Queste pagine vogliono essere un modesto contributo per far conoscere LUCA PACIOLI in un momento in cui Sansepolcro sta onorando l'altro illustre cittadino PIERO DELLA FRANCESCA nel cinquecentenario della sua morte.

Tra due anni, nel 1994, ricorre il cinquecentesimo anniversario della prima pubblicazione a stampa della *Summa de aritmetica proportioni et proportionalita* e queste note sono state scritte con lo scopo di avvicinare le persone a quest'opera che per certi versi è una pietra miliare nella storia della Matematica applicata.

Il libro è rivolto soprattutto ai miei allievi e avrei raggiunto lo scopo se, attraverso esso, almeno qualcuno di loro raggiungesse la convinzione che anche la matematica si può studiare partendo da fatti concreti: non mero studio di formule o acquisizione fredda di teoremi ma consapevolezza che a monte c'è la cultura di chi ci ha preceduto.

L'autore

LUCA PACIOLI

Le notizie sulla vita di Luca Pacioli sono scarse e insicure. Anche il suo vero nome è incerto: Luca ha adoperato il proprio cognome soltanto sulle lettere e sulle dediche mentre generalmente, come abitudine degli appartenenti agli ordini monastici, si firmava come FRA LUCA da Borgo Sansepolcro. Nella *Divina Proportione* appare come LUCAS PATIOLUS, in un'altra lettera come LUCAS PACCIOLUS, altre volte il suo cognome è scritto PACIOLO o PACIUOLO o PACIOLI.

Nacque verso il 1445 a Sansepolcro, allora Borgo del Santo Sepolcro, in Via dei Cipolli[1] da una famiglia molto umile, tanto che fu "adottato" dai più facoltosi Bofolci[2] per essere avviato agli studi.

Ebbe come primo maestro Piero della Francesca nella sua città natale, ma si trasferì presto alle dipendenze di un mercante veneziano, tal Antonio Rompiasi, per conto del quale compì molti viaggi; fu precettore dei suoi figli e per essi scrisse un primo trattato di matematica.

Qualche anno dopo il 1470, abbandonati i commerci, vestì l'abito dei Francescani minori[3] per dedicarsi pubblicamente all'insegnamento che esercitò sicuramente a Perugia, Roma, Napoli, Milano, Bologna, Venezia, Pisa. I motivi per i quali abbia vestito l'abito Francescano sono incerti: c'è chi afferma che l'abbia fatto per dedicarsi più facilmente all'insegnamento, chi per trovare appoggi e protezione nei suoi viaggi, chi per autentica vocazione: quest'ultima motivazione è probabilmente la meno attendibile visti anche i rapporti non sempre idilliaci che ha avuto con i superiori di Assisi e considerato che anche nelle sue opere quasi mai fa cenno al suo stato di religioso. Bisogna anche osservare che nella famiglia Pacioli si

[1] La sua casa natale non è oggi identificabile con certezza.

[2] Ricca famiglia di mercanti di Montecasale che si dovettero trasferire all'interno delle mura urbane di Sansepolcro nel 1187 allorché un'ordinanza ordinò di distruggere il loro Castello per motivi di sicurezza. Presero dimora nella via che ancor oggi porta il loro nome. Nel 1198 furono tra i promotori della costruzione della Torre di Berta.

[3] Alcuni storici asseriscono che si sia fatto frate nel 1484/85 a Roma ma è molto più probabile che la vestizione sia avvenuta pochi anni dopo il 1470 a Sansepolcro.

contavano, oltre a Luca, due suoi fratelli Francescani minori mentre nel 1511 due nipoti erano novizi.

Conobbe i maggiori mecenati e i più grandi ingegni del suo tempo, fu amico del Duca di Urbino[4], di Ludovico Sforza detto il Moro, di Leonardo da Vinci, di Leon Battista Alberti e di Papa Leone X.

Non è certa la data della sua morte, avvenuta a Roma nel 1514 secondo P. Fedele nel *Grande Dizionario Enciclopedico* UTET; secondo E. Agnoletti (*Personaggi di Sansepolcro*) morì invece tra il primo Aprile e il primo Ottobre del 1517, mentre altre fonti fanno risalire la morte al 1515. Sicuramente si trovava a Sansepolcro il 20 Novembre 1511, quando nella casa di suo nipote Antonio Massi Pacioli, in Via dei Cipolli, scrisse il suo testamento.[5]

Nella sua città natale Fra Luca Pacioli è ricordato da una lapide che si trova attualmente sotto le logge del Palazzo delle Laudi (v. p. 33):

A Luca Pacioli sono state intitolare due scuole: la Media e l'Istituto Tecnico Commerciale. Dal 7 gennaio 1944 una via è stata intitolata a Pacioli, stante il Decreto della Presidenza del Consiglio dei Ministri, la denominazione della Via Umberto I fu abolita e intitolata all'autore della *Summa,* mentre Piazza Luca Pacioli riprese il vecchio nome di Piazza S. Francesco.

Tra le sue opere, oltre ai vari trattati di matematica scritti per i suoi allievi, bisogna ricordare

- una edizione latina degli *Elementi* di Euclide, pubblicata a stampa nel 1509 .

- *De Divina Proportione*, anch'essa pubblicata a stampa nel 1509 e dedicata a Ludovico il Moro.

Di essa si conservano anche due manoscritti nella Biblioteca Civica di Ginevra e all'Ambrosiana di Milano. Quella che Pacioli chiama *Divina*

---

[4] Un famoso dipinto di Jacopo Bar (Jacopo de' Barbari) datato 1495 ritrae Luca Pacioli con alle spalle il suo protettore il Duca di Urbino.

[5] Tale testamento è conservato nell'Archivio generale dei contratti a Firenze. Un altro testamento fu scritto da Pacioli nel 1508 e si trova adesso nell'Archivio di Stato a Venezia. Egli nomina suoi eredi i parenti, la Chiesa di S. Giovanni a Sansepolcro e il Convento di S. Francesco, sempre a Sansepolcro. Non morì ricco, lasciando un patrimonio che si può stimare inferiore a 100 milioni di oggi.

A LUCA PACIOLI

CHE EBBERO AMICO E CONSULTORE LEONARDO DA VINCI E LEON

BATTISTA ALBERTI

CHE PRIMO DIÈ ALL’ALGEBRA LINGUAGGIO E STRUTTURA

DI SCIENZA

AVVIÒ IL GRAN TROVATO

D’APPLICARLA ALLA GEOMETRIA

INSEGNÒ LA SCRITTURA DOPPIA COMMERCIALE

DETTÒ OPERE DI MATEMATICA

BASE E NORME INVARIATE ALLE POSTERE

LUCUBRAZIONI

IL POPOLO DI S. SEPOLCRO

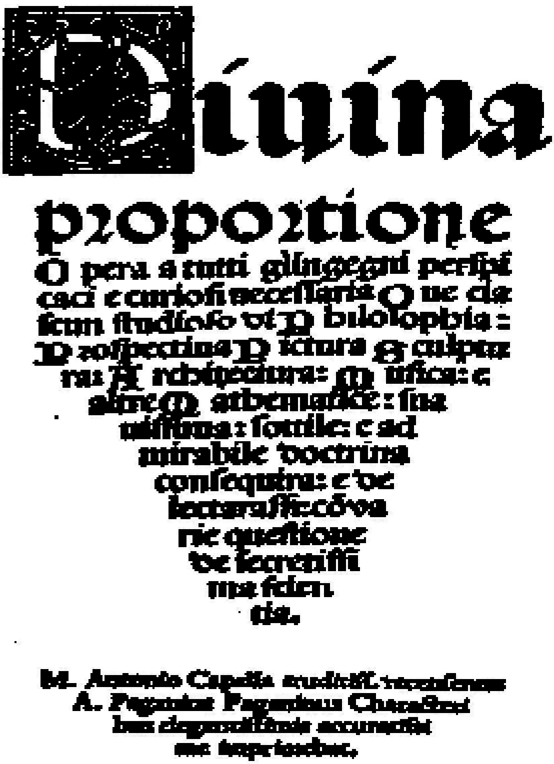
VERGOGNANDO 370 ANNI DI OBLIO

AL GRAN CONCITTADINO

PONEVA

1878

Proportione non è altro che la sezione aurea di un segmento[6]. Nella prima parte, dallo studio di cinque corpi regolari, viene stabilito il rapporto tra il loro spigolo e il raggio della sfera circoscritta, viene studiata l'inscrivibilità tra due poliedri e la costruzione di vari solidi. Il testo è impreziosito da illustrazioni "...facte et formate per quella ineffabile sinistra mano ..." di Leonardo da Vinci.



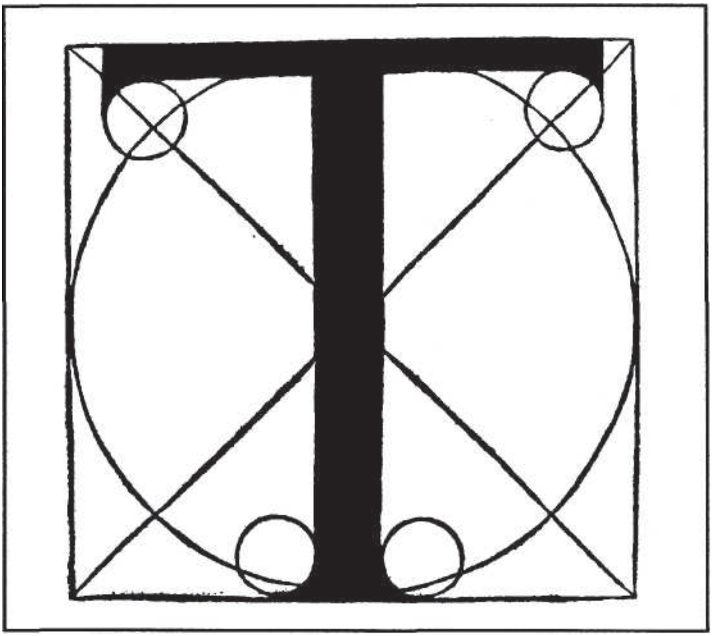
Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspi
caci e curiosi necessaria Oue cia
scun studioso di Philosophia:
Prospectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Musica: e
altre Mathematice: sua
uissima: sottile: e ad
mirabile doctrina
consequira: e de
lectarassi co va
rie questione
de secretissi
ma scien
tia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantissimis accuratissi
me imprimebat.

Frontespizio della DIVINA PROPORTIONE

[6] Dato un segmento di estremi A e B, si chiama sezione aurea quel punto C che divide il segmento in due parti tali che una è media proporzionale tra l'altra e tutto il segmento.

La seconda parte dell'opera è dedicata "a li suoi carissimi discipuli e alievi ...del borgo San Sepulchro..."; in essa Pacioli sostiene che le forme architettonicamente belle nascono dalla Divina Proportione e disegna, tra l'altro, il famoso "alphabeto dignissimo antico"[7].



La T dell'alphabeto degnissimo antico

La terza parte (*Libellus in tres partiales tractatus divisus*), scritta in volgare e dedicata a Pietro Soderini[8] è la traduzione in volgare del trattato *De*

[7] L'alfabeto è stato recentemente ripubblicato a cura di Attilio Rossi dalla casa editrice Silvana editoriale d'arte di Milano.
[8] Uomo politico fiorentino conosciuto da Pacioli a Roma alla Corte di Leone X dove godeva i favori del Papa grazie al fratello Cardinale Carlo Soderini.

quinque corporibus regolaribus di Piero della Francesca; il sommo pittore non viene mai citato nell'opera e da qui sono spesso nate feroci accuse di plagio verso Pacioli.[9]

Secondo noi chi le ha mosse o continua a muoverle è dalla parte della ragione perché effettivamente le somiglianze tra le due opere ci sono, come ci sono le somiglianze tra il *Liber Abaci* di Fibonacci e la *Summa.* Se però vogliamo giustificare il Frate, possiamo aggiungere che ha cambiato lingua scrivendo in volgare ciò che gli altri avevano scritto in latino, che i lavori dai quali ha attinto non erano stati dati alle stampe, che allora il copyright non esisteva (anche se lui nel 1492 aveva vietato la riproduzione della sua *Summa* per 10 anni) e infine che quella di impossessarsi dei lavori altrui sembrava un'abitudine frequente in quel periodo: che dire infatti di Cardano, che si impossessa della formula per la risoluzione delle equazioni di terzo grado scoperta da Tartaglia?[10]

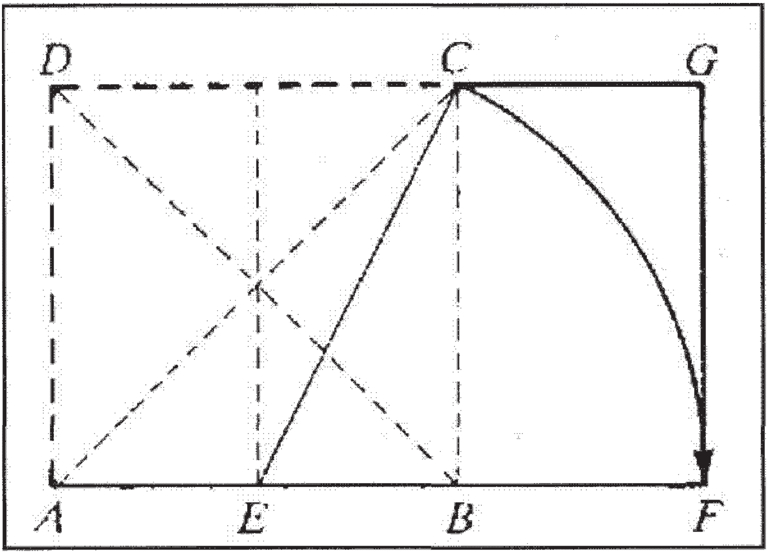
- *De viribus quantitatis*, manoscritto andato perduto, è una raccolta di giochi e curiosità matematiche;
- *De ludis ovvero schifanoia*, manoscritto anch'esso andato perduto, è una raccolta di giochi compreso quello degli scacchi, dedicato a Francesco Gonzaga e Isabella D'Este.
- L'opera più importante di Pacioli è tuttavia la *Summa*, della quale parleremo nel prossimo paragrafo.

[9] Uno dei più accaniti accusatori fu il Vasari (*Vite dei più eccellenti pittori*, *scultori e architetti*): egli, parlando di Piero della Francesca, accusa il Frate di aver fatto stampare come suoi molti libri del pittore che gli erano pervenuti dopo la sua morte (1492). Non è stato accusatore da meno Fabio Besta (*La ragioneria*, 1922).

[10] Il fatto avvenne nel 1545.1 matematici del tempo non pubblicavano subito le loro scoperte, ma attraverso "disfide matematiche" sfidavano le persone dotte a risolvere certi problemi che loro avevano affrontato con successo. In uno di questi duelli matematici Niccolò Tartaglia sfidò gli avversari a trovare una formula per risolvere le equazioni di terzo grado, ma fece un bando non troppo velato per cui Girolamo Cardano riuscì a capire il ragionamento di Tartaglia e lo pubblicò immediatamente nella sua famosa *Ars Magna,* senza menzionare Tartaglia stesso e scatenando le sue ire.

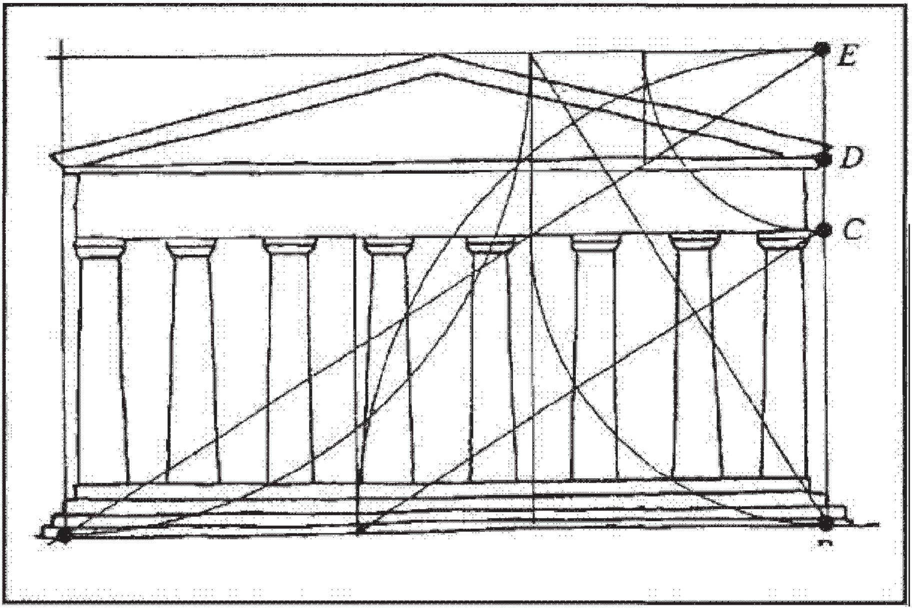
LA SEZIONE AUREA

La *Divina Proportione* di Pacioli è un argomento che ha interessato gli studiosi di matematica e di arte fin dall'antica Grecia. Euclide ne parla nel libro sesto degli *Elementi* definendo le due parti in cui la sezione aurea divide il segmento come ragione media e ragione estrema, affermando che "un segmento è diviso in media ed estrema ragione quando l'intero segmento ha, rispetto alla sua parte maggiore, lo stesso rapporto che quest'ultima ha rispetto alla sua



Sezione aurea e rettangolo aureo

parte minore". Sino dai tempi dei Greci, alla sezione aurea era affidato un importante carattere estetico e il rettangolo aureo, cioè quello in cui l'altezza è la sezione aurea della base, era considerato la figura esteticamente più bella e stupefacente. Leon Battista Alberti (1404-1472) verificò come la facciata del Partenone potesse essere inscritta in un rettangolo aureo. Il nome di sezione aurea fu usato per la prima volta in Germania durante periodo romantico. La bellezza ed armoniosità della sezione aurea si ritrova anche in natura, nelle dimensioni delle gemme di alcune piante, in quelle della stella marina e in alcune parti del corpo dell'uomo.



Il fronte del Partenone come rettangolo aureo

LA SUMMA DE ARITHMETICA GEOMETRIA, PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA

La *Summa de Arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (trattato di aritmetica, geometria, rapporti e proporzioni) è senz'altro l'opera che più di tutte ha reso famoso il nostro concittadino Fra LUCA PACIOLI. Fu pubblicata nel 1494 a Venezia dal tipografo Paganinus de Paganinis, lo stesso che nel 1509 stampò la *Divina Proportione* e nel 1523 una seconda edizione della *Summa,* perfettamente identica alla precedente. Di essa esistono a Sansepolcro almeno tre esemplari, in copia anastatica: uno presso la Biblioteca privata di Arduino Brizzi[11], uno presso la Biblioteca Comunale, l'ultimo presso la

[11] Arduino Brizzi, scrittore e cultore della storia di Sansepolcro, in particolare ha scritto "La Piazza".

Biblioteca dell'Istituto Tecnico Commerciale, che da Luca Pacioli prende il nome; essa è l'esemplare 133/200, prodotto nel 1970 dall'editore Guanda di Parma. Dedicata al Duca Guidobaldo da Montefeltro, è la prima Enciclopedia Matematica prodotta a stampa[12]. In essa l'autore attinge, per sua stessa affermazione, dai più

Ad illustrissimum Principem Gui. Ubaldum Urbini Ducē Montis feretri: ac Durantis Comitem. Grecis latinisq; litteris ornatissimum: ac Mathematice discipline cultorem feruentissimum: Fratris Luce de Burgo sancti Sepulchri: Ordinis minorum: et sacre Theologie Magistri. In artem arithmetice: et Geometrie. Prefatio.

La dedica della *Summa*.

autorevoli matematici del passato, in particolare Euclide e Fibonacci: di quest'ultimo segue, almeno parzialmente, anche gli argomenti trattati e l'ordine di trattazione che è stato usato nel *Liber Abaci*. Mentre però Fibonacci presenta l'algebra e l'aritmetica in forma dimostrativa, attraverso sicure dimostrazioni ("certa probatio"), l'opera di PACIOLI è più che altro pratica e illustrativa, limitandosi spesso l'autore a giustificare le proprie affermazioni soltanto col riscontro di qualche esempio. Del resto soprattutto da questo, deriva la sua fama: dalla sua opera divulgativa sia orale che scritta, culminante nell'uso del volgare, rozzo, mezzo italiano e mezzo veneziano, pieno di latinismi, grecismi e con costrutti dialettali[13] ma accessibile agli uomini "sanza lettere", cioè ignoranti del latino. Un altro pregio dell'opera è di aver sistemato materiale contemporaneo, tramandato spesso per via orale e largamente diffuso nella pratica.

---

[12] Prima della *Summa* furono stampati solamente la cosiddetta *Aritmetica* del Traviso nel 1478, gli *Elementi* di Euclide nel 1482 e altri trattatelli non certo dello spessore dell'opera di Pacioli. Se si pensa che la Bibbia di Gutemberg è del 1455, si capisce l'importanza divulgativa della *Summa*.
[13] Per rendersi conto del tipo di volgare usato confrontiamo il primo periodo della *Summa*, della *Divina Commedia* di Dante Alighieri e del *De prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca.
SUMMA: "Dividese tutta la presente opera in 5 parti principali. In la pria si tratta de numeri in tutti modi che ala pratica semplici: e speculatica spetti: cioè de figurare e
rilevare caratteri: partire multiplicare: summare: sotrare: e ....".
DIVINA COMMEDIA: "Nel mezzo del cammin di nostra vita, mi ritrovai per una selva oscura chè la diritta via era smarrita."

Sũma de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita.

Continentia de tutta lopera.

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.
Proportioni e ꝓportiõalita anotitia del. 5° de Euclide e de tutti li altri soi libri.
Chiaui ouero euidentie numero. 13. p le q̃ntita continue ꝓportiõali del. 6° e. 7° de Euclide extratte.
Tutte le pti delalgorismo: cioe releuare. ptir. multiplicar. sũmare. e sotrare cõ tutte sue ꝓue i sani e rotti. e radici e progressioni.
De la regola mercantesca ditta del. 3. e soi fõdamenti con casi exemplari per c° m° § .G. guadagni: perdite: transportationi: e inuestite.
Partir. multiplicar. summar. e sotrar de le proportioni e de tutte sorti radici.
De le. 3. regole del catayn ditta positiõe e sua origie.
Euidentie generali ouer conclusioni n° 66. absoluere ogni caso che per regole ordinarie nõ si podesse.
Tutte sorte binomii e recisi e altre linee irratiõali del decimo de Euclide.
Tutte regole de algebra ditte de la cosa e lor fabriche e fondamenti.
Compagnie i tutti modi. e lor partire.
Socide de bestiami. e lor partire
Fitti: pesciõi: cottimi: liuelli: logagioni: egodimenti.
Baratti i tutti modi semplici: composti: e col tempo.
Cambi reali. secchi. fittitii. e diminuti ouer comuni.
Meriti semplici e a capo danno e altri termini.
Resti. saldi. sconti. de tempo e denari e de recare a un di piu partite.
Oři. argẽti. e lloro affinare. e carattare
Molti casi e ragioni straordinarie varie e diuerse a tutte occurentie commo nella sequente tauola apare ordinatamente de tutte.
Ordine a saper tener ogni cõto e scripture e del quaderno in vinegia.
Tariffa de tutte vsanze e costumi mercanteschi in tutto el mondo.
Pratica e theorica de geometria e de li. 5. corpi regulari e altri dependenti.
E molte altre cose d grandissimi piaceri e frutto cõmo difusamente per la sequente tauola appare.

Indice della *Summa*

DE PROSPECTIVA PINGENDI: "La pictura contiene in se tre parti principali quali diciamo essere disegno, commensuratio et colorare."

La *Summa* è divisa in due parti: la prima dedicata all'aritmetica e all'algebra e la seconda alla geometria; ogni parte e' divisa in **distinctiones,** a loro volta divise in **tractati** e **capituli.** Nella parte dedicata all'aritmetica vengono discusse le varie specie di numeri, le operazioni elementari comprese le radici quadrate e cubiche, le frazioni, i rapporti (proportioni), le proporzioni (proportionalità), i problemi del tre semplice e composto.

Nella parte dedicata all'algebra sono trattati i numeri relativi, i razionali, gli irrazionali, sono risolte le equazioni di primo e di secondo grado, particolari equazioni di quarto grado. C'è inoltre una dichiarazione dell'autore che afferma di non essere riuscito a trovare un metodo generale per risolvere le equazioni di grado superiore al secondo[14]. L'algebra[15] è trattata (nella *Summa*) in modo retorico, cioè espressa con parole, ma le moltissime abbreviazioni usate preludono per la prima volta al passaggio all'algebra sincopata[16], a sua volta anticipatrice della moderna algebra simbolica. Ancora nella parte dedicata all'algebra viene trattata la matematica finanziaria: sono trattati problemi di baratto, di scambio, di sconto e di gioco; importante è lo studio del merito[17] e la compilazione di tavole dell'interesse semplice e composto. Importanza particolare assume l'ultima parte sulla tenuta dei libri contabili in partita doppia che ha consacrato Pacioli padre della ragioneria moderna; le tecniche illustrate erano già in uso nelle più importanti città di commercio, in particolare Venezia, ma in questo caso, secondo noi, è veramente ingeneroso e scorretto accusare PACIOLI di plagio perché il materiale raccolto era a disposizione e alla portata di tutti.

Nella parte dedicata alla geometria, la meno originale di tutta l'opera, attingendo soprattutto ad Euclide, Pacioli tratta dell'area dei triangoli e della regola di Erone[18], studia i cerchi, la divisione di figure piane con rette, il volume

---

[14] Mentre la risoluzione dell'equazione di secondo grado era già nota agli antichi matematici indiani, quella dell'equazione cubica è dovuta a Girolamo Cardano (Ars Magna, 1545). Il primo a risolvere equazioni di quarto grado fu invece Ludovico Ferrari (1512 - 1565) mentre un'equazione di grado superiore al quarto non è risolubile per radicali (teorema di Ruffini, 1799).

[15] L'algebra è chiamata da Pacioli *Ars Maior*, denominazione ripresa molto frequentemente dai suoi successori.

[16] Sincope è la riduzione di un suono o di un gruppo di suoni all'interno di una parola (spirto al posto di spirito). Algebra sincopata è quella in cui le parole sono ridotte attraverso sincopi.

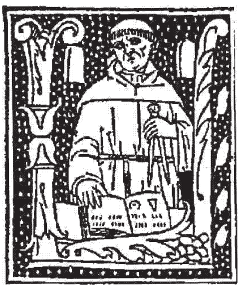
[17] Merito è l'interesse. Merito del merito è l'interesse composto.

[18] Dette a, b, e c le misure dei lati di un triangolo e p il suo semiperimetro, la regola di Erone afferma che il quadrato dell'area e' uguale a p*(p-a)*(p-b)+(p-c).

dei solidi e descrive strumenti per misurare gli angoli. Nell'ultima parte sono presentati 150 problemi di aritmetica, di astronomia, di statica, che ancor oggi vengono presentati nei libri scolastici; per la prima volta, inoltre, l'algebra viene applicata alla soluzione di problemi geometrici. Per quanto riguarda edizioni o riedizioni della SUMMA è certo che

- La *Summa* fu pubblicata nel 1492 ed ebbe una seconda edizione nel 1523. Nello stesso anno la Distinctio IX tractatus V (*De computis et scripturis*) fu tradotta in inglese (*Oldcastle*), in francese e in fiammingo (*Jan Ympyn*). Da quel momento è stata ristampata solo nel 1914, negli Stati Uniti, con testo americano a fronte. Nel 1923 è stata riprodotta in un microfilm che si trova attualmente nella Biblioteca Vaticana. Infine esiste la già citata riedizione di Parma del 1970. Il trattato *De Computis et scripturis* è stato tradotto invece più frequentemente: nel 1876 ad opera di Jager in tedesco, nel 1878 in italiano ad opera di Vincenzo Gitti, nel 1894 in boemo, nel 1896 in olandese, nel 1911 in italiano ad opera di Giovanni Massa, nel 1959 sempre in italiano da Carlo Antinori.

In questa nota vogliamo far vedere quali erano le conoscenze di aritmetica e algebra commentando certe affermazioni fatte da PACIOLI nella sua opera. In particolare affronteremo una affermazione sulle progressioni aritmetiche, una sulle progressioni geometriche e un problema di calcolo finanziario.



PRIMA REGULA CONTINUE PROGR...

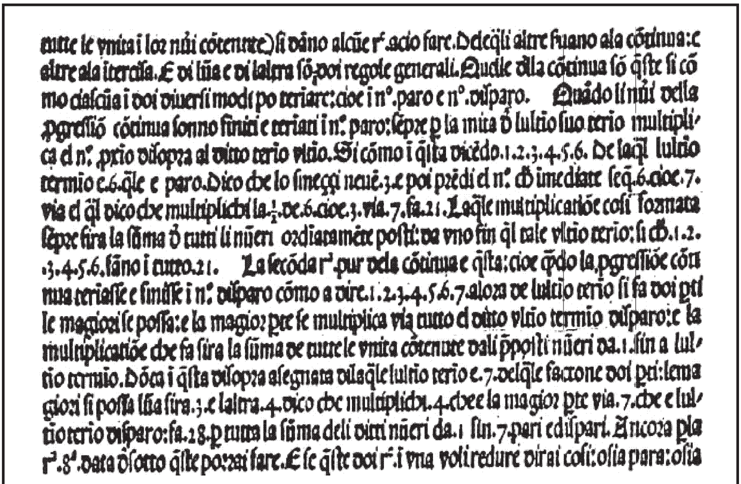
Si chiama progressione una successione di un numero infinito di termini costituiti in base ad una legge data. Siccome i modi di determinare una legge sono infiniti, si possono considerare quante si vogliono progressioni. L'interesse dei matematici si è concentrato sulle progressioni aritmetiche, geometriche e armoniche.

Si chiama progressione aritmetica un insieme di numeri tali che ognuno di essi, eccetto il primo che è qualsiasi, si ottiene aggiungendo al precedente una quantità fissa q detta ragione. Se $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sono i termini di una progressione, la loro somma S e' data da

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$

Nella **distinctio secunda, tractatus quintus,** PACIOLI si interessa delle progressioni aritmetiche di primo termine uguale a 1 e di ragione 1 e dà la seguente regola per trovarne la somma: "**moltiplica la metà dell'ultimo termine per il successivo dell'ultimo termine stesso: questa è la somma".**

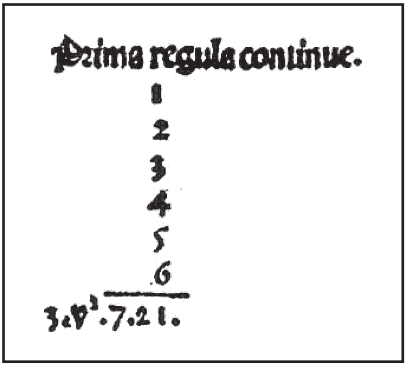
Ecco il documento:



tutte le vnita i lor nūi cōtenute) si dāno alcūe r°. acio fare. De q̄li altre fuano ala cōtinua: e altre ala itercisa. E di lūa e di laltra sō.2.doi regole generali. Quelle d'la cōtinua sō q̄ste si cōmo ciascūa i doi diuersi modi po variare: cioe i n°. paro e n°. disparo. Quādo li nūi della ꝓgressiō cōtinua sonno finiti e variati i n°. paro: sēpre ꝑ la mita d' lultio suo terio multiplica el n°. ꝓrio disopra al ditto terio vltio. Si cōmo i q̄sta dicēdo.1.2.3.4.5.6. De laq̄l lultio termio e.6. q̄le e paro. Dico che lo sinegi neuē.3.e poi p̄edi el n°. ch' imediate seq̄.6. cioe.7. via el q̄l dico che multiplichi la.½. de.6. cioe.3. via.7. fa.21. La q̄le multiplicatiōe cosi formata sēpre fira la sūma d' tutti li nūeri ordinatamēte posti: da vno fin q̄l tale vltio terio: si ch'.1.2.3.4.5.6. fāno i tutto.21. La secōda r°. pur dela cōtinua e q̄sta: cioe q̄do la ꝓgressiōe cōtinua variasse e finisse i n°. disparo cōmo a dire.1.2.3.4.5.6.7. alora de lultio terio si fa doi pti le magiori se possa: e la magior pte se multiplica via tutto el ditto vltio termio disparo: e la multiplicatiōe che fa fira la sūma de tutte le vnita cōtenute dali ꝓpositi nūeri da.1. fin a lultio termio. Dōca i q̄sta disopra asegnata dilaq̄le lultio terio e.7. delq̄le facione doi pti: le magiori si possa lūa fira.3. e laltra.4. dico che multiplichi.4. che e la magior pte via.7. che e lultio terio disparo: fa.28. ꝑ tutta la sūma deli ditti nūeri da.1 fin.7. pari e dispari. Ancora pla r°.8ª. data disotto q̄ste porrai fare. E se q̄ste doi r°. i vna voli redure dirai cosi: o sia para: o sia

- Distinctio secunda, tractatus quintus

con l'esempio a margine


Prima regula continue.
1
2
3
4
5
6
3.v°.7.21.

Distinctio seconda, tractatus quintus: esempio di progressione aritmetica di ragione 1

e con la traduzione:

Quando li numeri della progressione continua sono finiti e terminati in uno pari: sempre prendi la metà dell'ultimo suo termine moltiplica il numero prima di sopra al detto termine ultimo. Così come in questa dicendo 1.2.3.4.5.6. Della quale l'ultimo termine è 6 che è pari. Dico che lo dimezzi e viene 3 e poi prendi il numero che immediatamente segue 6 cioè 7 per il quale dico che moltiplichi la metà di 6 cioè 3 per 7 fa 21. La quale moltiplicazione così formata sempre tira la somma di tutti i numeri ordinatamente posti: da uno fino a quel tale ultimo termine. Così che 1. 2. 3. 4.5. 6 fanno in tutto 21..."

Dalla regola generale si può dimostrare la validità di questo algoritmo. Infatti per la particolare progressione considerata si ha

primo termine = a_1 = 1
secondo termine = a_2 = 2
terzo termine = a_3 = 3

ultimo termine = a_n = n

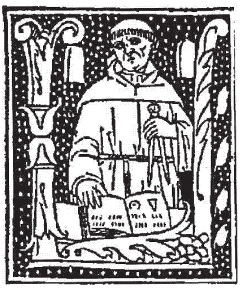
per cui, sostituendo nella formula della somma:

$$S = \frac{1 + n}{2} * n$$

da cui

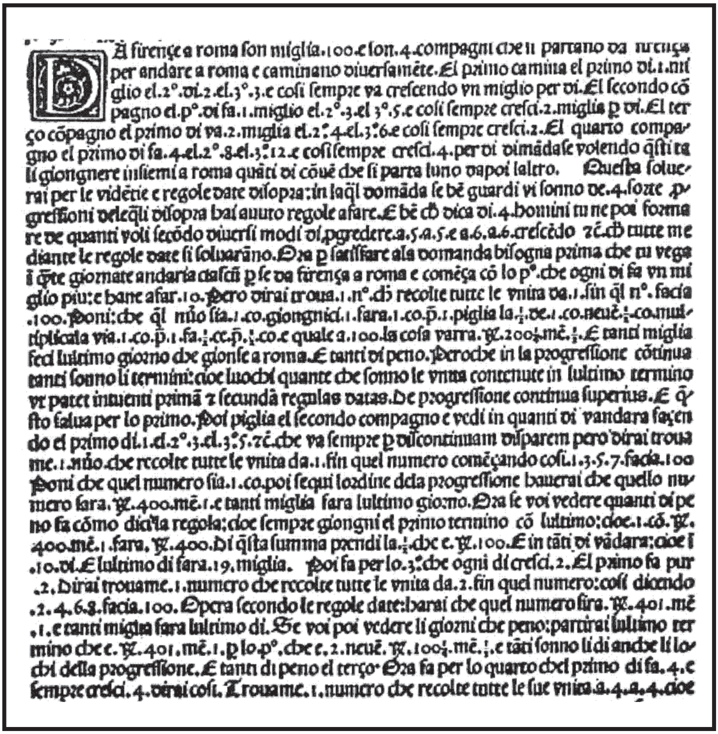
$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{n}}{2}(1+n)$$

che è proprio l'algoritmo di PACIOLI essendo **n** l'ultimo termine e (l+n) il suo successivo.



DA FIRENZE A ROMA SON MIGLIA 100...

La regola precedente è applicata nel seguente esempio tratto sempre dalla **distinctio secunda, tractatus quintus**


Da firençe a roma son miglia.100.e son.4.compagni che si partano da firençe
per andare a roma e caminano diversamẽte. El primo camina el primo di.1.mi
glio el.2°.di.2.el.3°.3.e cosi sempre va crescendo un miglio per di. El secondo cõ
pagno el.p°.di fa.1.miglio el.2°.3.el 3°.5.e cosi sempre cresci.2.miglia p di. El ter
ço cõpagno el primo di va.2.miglia el.2°.4.el.3°.6.e cosi sempre cresci.2. El quarto compa
gno el primo di fa.4.el.2°.8.el.3°.12.e cosi sempre cresci.4.per di dimãdase volendo q̃sti ta
li giongnere insiemi a roma quãti di cõuẽ che si parta luno dapoi laltro. Questa solue
rai per le videtie e regole date disopra: in laq̃l domãda se bẽ guardi vi sonno de.4.sorte p
gressioni deleq̃li disopra hai auuto regole afare. E bẽ ch dica di.4.homini tu ne poi forma
re de quanti voli secõdo diuersi modi di pgredere.a.5.a.5.e a.6.a.6.crescẽdo 7c. ch tutte me
diante le regole date si soluarãno. Ora p satisfare ala domanda bisogna prima che tu vega
i q̃te giornate andaria ciascũ p se da firença a roma e comẽça cõ lo p°.che ogni di fa vn mi
glio piu: e hane afar.10. Pero dirai troua.1.n°.ch recolte tutte le vnita da.1.fin q̃l n°.facia
.100. Poni: che q̃l nũo sia.1.co.giongnici.1.fara.1.co.p̃.1.piglia la.½.de.1.co.neuẽ.½.co.mul
tiplicala via.1.co.p̃.1.fa.½.ce.p̃.½.co.e quale a.100.la cosa varra.R̷.200¼.mẽ.½. E tanti miglia
fecl lultimo giorno che gionse a roma. E tanti di peno. Perochẽ in la progressione cõtinua
tanti sonno li termini: cioe luochi quante che sonno le vnita contenute in lultimo termino
vt patet inuenti primã z secundã regulas datas. De progressione continua superius. E q̃
sto salua per lo primo. Poi piglia el secondo compagno e vedi in quanti di vandara façen
do el primo di.1.el.2°.3.el.3°.5.7c.che va sempre p discontinuam disparem pero dirai troua
me.1.nũo.che recolte tutte le vnita da.1.fin quel numero comẽçando cosi.1.3.5.7.facia.100
Poni che quel numero sia.1.co.poi sequi lordine dela progressione hauerai che quello nu
mero sara.R̷.400.mẽ.1.e tanti miglia fara lultimo giorno. Ora se voi vedere quanti di pe
no fa cõmo dicila regola: cioe sempre giongni el primo termino cõ lultimo: cioe.1.cõ.R̷.
400.mẽ.1.fara.R̷.400.Di q̃sta summa prendi la.½.che e.R̷.100. E in tãti di vãdara: cioe i
.10.di. E lultimo di fara.19.miglia. Poi fa per lo.3°.che ogni di cresci.2. El primo fa pur
.2. Dirai trouame.1.numero che recolte tutte le vnita da.2.fin quel numero: cosi dicendo
.2.4.6.8.facia.100. Opera secondo le regole date: harai che quel numero fira.R̷.401.mẽ
.1.e tanti miglia fara lultimo di. Se voi poi vedere li giorni che peno: partirai lultimo ter
mino che e.R̷.401.mẽ.1.p lo.p°.che e.2.neuẽ.R̷.100¼.mẽ.½.e tãti sonno li di anche li lo
chi della progressione. E tanti di peno el terço. Ora fa per lo quarto chel primo di fa.4.e
sempre cresci.4.dirai cosi. Trouame.1.numero che recolte tutte le sue vnita a.4.a.4.cioe

- Distinctio secunda, tractatus quintus, 14

ed ecco la traduzione:

Da Firençe a Roma son miglia 100 e son 4 compagni che si partono da Firençe per andare a Roma e camminano diversamente. El primo cammina el primo di 1 miglio el 2° di 2 el 3° 3 e cosi sempre va crescendo un miglio per di. El secondo compagno el primo di fa un miglio el 2° 3 el

3° 5 e cosi sempre cresci 2 miglia per di. El terço compagno el primo di va 2 miglia el 2° 4 el 3° 6 e cosi' sempre cresci 2. El quarto compagno el primo di fa 4 el 2° 8 el 3° 12 e cosi sempre cresci 4 per di dimanda se volendo questi tali giongnere insiemi a roma quanti di conven che si parte l'uno dopoi laltro. Questa solverai per le videntie e regole date disopra: in laqual domanda se ben guardi vi sonno de 4 sorte progressioni delequali disopra hai avuto regole afare. E ben che dica di 4 homini tu ne poi formare de quanti voli secondo diversi modi di progredere a 5 a 5 e a 6 a 6 crescendo etcetera che tutte mediante le regole date si sol varanno. Ora per satisfare ala domanda bisogna prima che tu vega in quante giornate andaria ciascun per se da Firença a Roma e comença con lo primo che ogni di fa un miglio in più : e hane afar 10. Pero dirai trova un numero che recolte tutte le unita da 1 fin quel numero facia 100. Poni: che quel numero sia co giongnici 1 farà co p 1 miglia la 1/2 de co neven ½ co moltiplicala via co p 1 fa 1/2co^2 p l/2co e quale a 100 la cosa varrà 2001/4 men*1/2.* E tanti miglia feci lultimo giorno che gionse a Roma. E tanti di peno…

Quattro compagni fanno la strada da Firenze a Roma (100 miglia) percorrendo al giorno le miglia indicate nella seguente tabella: nelle righe sono riportati i viandanti e nelle colonne i rispettivi modi di procedere al giorno:

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
1°	1	2	3	4	5	6
2°	1	3	5	7	9	11
3°	2	4	6	8	10	12
4°	4	8	12	16	20	24

Volendo giungere lo stesso giorno a Roma, quanti giorni l'uno dopo l'altro devono partire?

Ora, dice PACIOLI, per soddisfare la domanda bisogna prima che tu veda in quanti giorni andrà ciascuno per conto suo da Firenze a Roma e a cominciare dal primo, che ogni giorno fa un miglio in più ‘. Bisogna trovare un numero tale che **“raccolte tutte le unità da 1 a quel numero faccia 100”.** Si tratta di applicare cioè l’inverso dell’algoritmo di prima (c’è da trovare l’ultimo termine della progressione).

Chiamato **co** il numero cercato **[poni che quel numero sia co]** il successivo sarà co+1 **[giongnici 1 farà co p 1]** che, moltiplicato per la metà di **co,** darà ***1/2*** co(co+1) **[piglia la *1/2* de co ne vien *1/2* co moltiplicala via co p 1...]** cioè ***1/2***co2 + ***1/2***co **[fa *1/2* p *1/2***co].

Questa quantità dovrà essere posta uguale a 100 per cui

$\frac{1}{2}\, co^2 + \frac{1}{2}\, co = \mathbf{100}$

Risolviamo questa equazione di secondo grado come presumibilmente l’ha risolta PACIOLI. Moltiplicando ambo i membri per 2 e ottenendo:

$$co^2 + co = 200$$

aggiungendo ad ambo i membri *1/4*

$$co^2 + co + 1/4 = \mathbf{200} + 1/4$$

e scrivendo il primo membro come quadrato di un binomio

$$\mathbf{(co + 1/2)^2 = 200 + 1/4}$$

da cui

$$\mathbf{co} + 1/2 = \mathbf{(200 + 1/4)^{1/2}}$$

e quindi

$$\mathbf{co = (200 + 1/4)^{1/2} - 1/2}$$

[la cosa verrà 2OO1/4 me’ 1/2 e tanti miglia fece l’ultimo giorno che giunse a roma. E tanti di peno].

Prima osservazione: le soluzioni negative non avevano alcun significato, così come le soluzioni complesse (numeri silvestri).

Seconda osservazione: l'incognita è chiamata in modo sincopato co, abbreviazione di cosa; l'algebra classica ha preso successivamente l'abitudine di indicare le incognite con le ultime lettere minuscole dell'alfabeto latino (x, y, ...) ma oggi si torna ad usare nomi evocativi: cosi, una incognita che indica un prezzo, non sarà chiamata x ma proprio prezzo, una contenente una data sarà chiamata data.

Terza ed ultima osservazione: l'algoritmo usato per la soluzione dell'equazione di II grado e' sostanzialmente quello usato oggi. PACIOLI ne aveva ereditato la conoscenza dagli arabi e in particolare dai lavori di al-Khuwarizmi e italianizzati da Fibonacci[19].

DE PROGRESSIONIBUS PPROPORTIONALIB. ET PRIMO DE DUPLIS ET CETERIS MULTIPLICIBUS

Si chiama progressione geometrica una sequenza di numeri a_1 a_2, a_3,..., a_n tali che ognuno di essi, eccetto il primo che è qualsiasi, si ottenga moltiplicando il precedente per un numero fisso chiamato ragione. Le progressioni geometriche trovano importanti applicazioni in matematica finanziaria. I montanti annui parziali di un capitale impiegato ad un tasso composto, ad esempio, formano una progressione geometrica. Infatti, se un capitale C è impiegato al tasso r, gli interessi del primo anno saranno

$$\mathbf{I_1 = Cr/100}$$

e quindi il montante alla fine del primo anno sarà

$$M_1 = C + \mathbf{Cr/100 = C(l+r/100)}$$

[19] Leonardo Fibonacci, detto il Pisano, matematico del XII-XIII secolo che introdusse la numerazione araba. Scrisse il "LIBER ABACI", sorta di enciclopedia Matematica.

Nel secondo anno gli interessi saranno

$$\mathbf{I_2 = \mathit{M_1 r/100}}$$

e quindi il montante alla fine del secondo anno sarà

$$\mathbf{M_2 = M_{1+}I_2 = M_1 + M_1 r/100 = M_1(l+r/100) = C\ (l+r/100)\ (l+r/100) = C(l+r/100)^2}$$

Nel terzo anno gli interessi diventeranno

$$\mathbf{I_3 = M_2 r/100}$$

e quindi il montante alla fine del terzo anno sarà

$$\mathbf{M_3 = M_2 + 1_3 = M_2 + M_2 r/100 = M_2(l+r/100) = C(l+r/100)^2(l+r/100) = C(l+r/100)^3}$$

Iterando questa formula e generalizzandola, dopo n anni si avrà un montante

$$\mathbf{M_n = C(l+r/100)^n}$$

La successione M_1 M_2, M_3, ..., M_n è quindi una progressione geometrica di ragione (l+r/100)

È a volte necessario trovare quanto vale la somma S dei primi n termini di una progressione geometrica. Il problema è risolto dalla formula

$$\mathbf{S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

dove a_1 è il primo termine, q è la ragione e n è il numero di termini che si vogliono sommare. Cosi i quattro termini della progressione geometrica 2, 10, 50, 250 (di ragione 5) hanno per somma

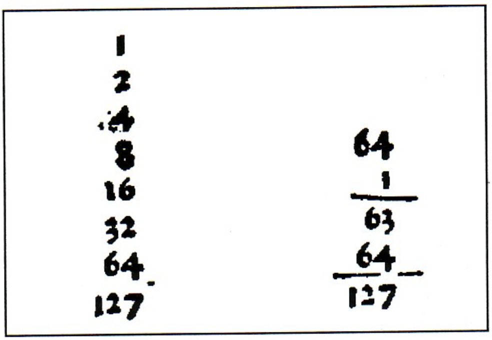
$$\mathbf{S = 2 \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 2 \frac{625 - 1}{4} = \frac{624}{2} = 312}$$

Nella *Summa*, **distinctio secunda, tractatus quintus,** sono trattate alcune progressioni geometriche e PACIOLI suggerisce gli algoritmi per trovarne la somma. In particolare egli prende la successione che chiama progressione dei doppi: essa non sarebbe altro che una progressione di interi di ragione due e Pacioli dà la seguente regola per trovare la somma: **"alla differenza tra l'ultimo termine e il primo termine, aggiungere l'ultimo termine stesso".** Come esempio suggerisce la progressione 1, 2, 4, 8,16, 32, 64, la cui somma è 127, e fa di questo esempio anche la seguente rappresentazione schematica:

1	**64**
2	**1**
4	**—**
8	**63**
16	**64**
32	**—**
64	**127**
127	

Distinctio seconda, tractatus quintus: progressione geometrica dei doppi

dove la prima colonna rappresenta nelle prime 7 righe i 7 termini della successione e nell'ultima la somma. Nella colonna di destra sottrae il primo termine (1) dall'ultimo termine (64), ottenendo 63, alla quale differenza aggiunge l'ultimo termine (ancora 64) ottenendo

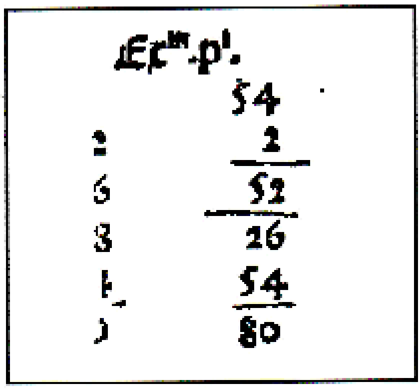


Distinctio seconda, tractatus quintus: progressione geometrica dei doppi

127 che è il risultato giusto.

Il capitolo prosegue trattando le progressioni triple (de triplis progressionibus) e quadruple (**de quadruplis progressionibus),** cioè le progressioni di ragione tre e quattro. Per quanto riguarda il calcolo della somma delle prime, PACIOLI suggerisce il seguente algoritmo: **"Si aggiunga l'ultimo termine alla metà della differenza tra l'ultimo termine stesso e il primo"** e fa due sempi; il primo:

2	54
6	2
18	52
54	26
80	54
	80



Distinctio secunda, tractatus quintus: esempio di progressione geometrica dei tripli

e il secondo:

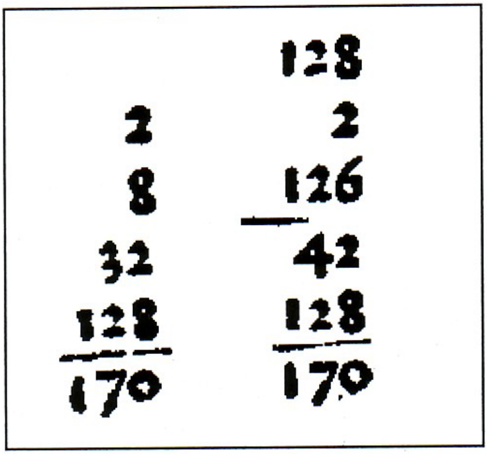
1	81
3	1
9	80
27	40
81	81
121	121

per quanto riguarda le progressioni quadruple invece l'algoritmo è **"Si aggiunga l'ultimo termine alla terza parte della differenza tra l'ultimo termine stesso e il primo".** Anche qui ci sono due esempi; il primo:

1	64
4	1
16	—
64	63
—	—
85	21
	64
	—
	85

e il secondo:

2	128
8	2
32	—
128	126
—	—
170	42
	128
	—
	170



Distinctio seconda, tractatus quintus: progressione geometrica dei quadrupli.

Anche in questi esempi nella prima colonna ci sono i termini della progressione seguiti dalla loro somma, e nella seconda colonna è applicato l'algoritmo.

I DOCUMENTI E LA TRADUZIONE

Si riporta la parte della **distinctio secunda, tractatus quintus** dove vengono esposte le regole fin qui trattate. Se ne riporta anche la traduzione

" Ma bisogna poi chacio siano ancora dele quantità che fossero secondo la proportionalita continua per modum quasi progressionis ordinate dare regole e norma asaperle subitamente ancora summarle e recogliere. Avenga che impropriamente siano dette le sequenti progressioni. Conciosia cosa che progressione sia secondo equale excesso arithmetice non geometrice aver secondo la omissione diqualche numero uno: cioè e non più e in le sequenti li excessi se abino atender penes proportionem geometricam et non penes proportionem arithmeticam ut statibus parebit. Ma largo modo voglio le chiamiamo progressioni proportionali per le quali sia questa la prima infallibile regola comengando dala dupla: e començi da che terino si voglia o rotto o sano sempre e vera: cioè che avolere recogliere tutte le unita deli termini de una proportione dupla: e comengi donde si voglia: e sieno quanti termini se voglio. Sempre cava lo primo termino de l'ultimo e lo rimanente giogni a lultimo termino: la summa che farà fia la summa de le unita contenute da tutti ditti termini. Si commo fosse 3 .6 .12. 24 . 48. Dico che cavi .3. che e el primo termino da .48. che e' lultimo resta .45. E questo resto dico che gionga con lultimo termino: cioè con .48. fa .93. e tanto fia la summa de tutti quelli termini situati i la proportione dupla. E cosi se comencasse da .1. dicendo 1.2.4.8.16.32.64. cava .1. da .64. resta .63. qual gionto con .64. fa .127. per tutta ditta summa e cosi in tutte comenci donde voglia

De triplis progressionibus

Volendo summare tutte le unita de una progressione li cui termini fieno situati in la proportionalita continua tripla: sempre cava el primo termino de lultimo: e la *Vi* del rimanete gionta a lultimo termino farà la summa de tutti ditti termini e comencjno da dove si voglia non fa caso o rotti o sani. Si commo a dire .1. .3. .9. .27. .81. Dico che cavi .1. de .81.

resta .80. la cui *M.* e .40. gionta a lultimo termino quale e 81 fa .121 per tutta ditta summa. E cosi comencando da .2. e dire .2. .6. .18. .54. cava .2. de .54. resta .52. la cui *M.* ene .26. gionta a lultimo termino eh'e .54. fa .80. per tutta ditta summa De quadruplis progressionibus

E volendo summare tutte le unita contenute da li termini situati in la continua proportionalita quadrupla. Sempre cava el primo termino de lultimo el tergo del rimanente gionto a lultimo termino farà la summa de tutti li termini. Si cornino a dire 1.4.16.64. dico che cavi .1. de .64. resta .63. el cui tergo e .21. gionto alultimo termino che e .64. fa .85. per tutta la summa de ditti termini, e cosi dicendo .2. 8. 32.128. cava .2. de .128. resta .126. El cui tergo e .42. che gionto a .128. fa .170. per tutta la summa de ditti termini. E cosi in ciascuna altra respondera ideo..."

LA CORRETTEZZA DEGLI ALGORITMI

Gli algoritmi proposti si possono dedurre dalla legge della somma dei termini di una progressione geometrica. Infatti in una progressione geometrica di n termini di ragione 2 si ha:

primo termine = a_1
secondo temine = 2 a_1
terzo termine = 2*secondo termine = $2*2a_1 = 2^2a_1$
quarto termine = 2*terzo termine = $2*2^2a_1 = 2^3a_1$

.
.
.

ultimo termine = 2^{n-1} a_1

per cui partendo dalla

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

e sostituendo 2 a q

$$S = a_1 \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

da cui

$$S = a_1 (2^n - 1)$$

e quindi

$$S = a_1 (2 \cdot 2^{n-1} - 1)$$

$$S = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-1} a_1 - a_1$$
$$S = a_1 (2^{n-1} + 2^{n-1} - 1)$$

S = **ultimo termine + ultimo termine - primo termine**

S = ultimo termine + (ultimo termine - primo termine)

che e' proprio l'algoritmo di PACIOLI.

Per la progressione dei tripli, ricordando che

primo termine = a_1
secondo termine = 3*primo termine = $3\ a_1$
terzo termine = 3*secondo termine = $3*3\ a_1 = 3^2\ a_1$
quarto termine = 3*terzo termine = $3*3^2\ a_1 = 3^3 a_1$
.
.
.
ultimo termine = $3^{n-1}\ a_1$

e sempre partendo dalla

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

e sostituendo 3 a q

$$S = a_1 \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

cioè

$$S = a_1 \frac{3*3^n - 1}{2}$$

da cui

$$S = a_1 \quad \frac{2*3^{n-1} + 3^{n-1} - 1}{2}$$

che equivale alla

$$S = a_1 \quad \frac{2*3^{n-1} a_1 + 3^{n-1} a_1 - a_1}{2}$$

cioè

$$S = a_1 \quad \frac{2*3^{n-1} a_1}{2} + \frac{3^{n-1} a_1 - a_1}{2}$$

e quindi

$$S = 3^{n-1} a_1 + \frac{3^{n-1} a_1 - a_1}{2}$$

cioè

$$\mathbf{S = ultimo\ termine + \frac{ultimo\ termine - primo\ termine}{2}}$$

che è ancora l'algoritmo di PACIOLI.

Con una dimostrazione analoga alle due precedenti si può verificare che anche l'algoritmo dei quadrupli è deducibile dalla formula della somma di una progressione geometrica.

Altrettanto si può dire per le formule che di seguito, nella **distinctio secunda, titulus quintus,** PACIOLI suggerisce per altre progressioni, geometriche e non.

L' interessante è osservare come, non avendo con tutta probabilità PACIOLI fatto altro che sistemare per scritto il suo sapere in campo scientifico e mercantile, l'esperienza di quel tempo permetteva di usare formule e algoritmi corretti senza che però ne fosse data un minimo di dimostrazione. Come si può vedere nel documento originale egli si limita solamente a dare giustificazione di quanto afferma con qualche esempio a margine, magari ben congegnato.

...DIMANDO A QUANTO FO PRESTATA LA SOMMA EL MESE ...

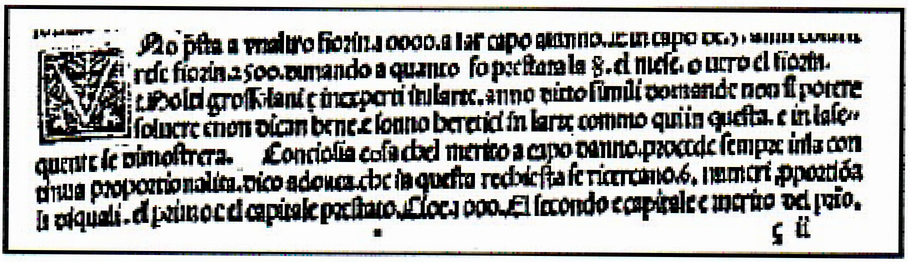
La **distinctio nona** della prima parte della *Summa* è tutta dedicata alla trattazione di problemi di matematica applicata: di baratto, di scambio, di leghe, di gioco ecc. Viene trattato, e in particolare, il problema dell'interesse composto (merito del merito) facendo uso delle progressioni geometriche . Sappiamo che, detti

C il capitale impiegato, **r** il tasso percentuale (interesse per 100 lire), **t** il tempo di impiego del capitale, M il montante prodotto,

la legge fondamentale del regime composto è

M = Ct+r/100)^{t}

Il problema di ricavare **r** oppure **t** da questa legge richiede l'utilizzo di una equazione logaritmico-esponenziale che PACIOLI non sapeva risolvere: infatti i logaritmi sono stati introdotti da Nepero[20], nato nel 1550, quindi almeno 100 anni dopo. PACIOLI afferma che questi problemi erano ritenuti irresolubili ai suoi tempi come si osserva dal capitolo 18 del trattato quinto


Uno p̄sta a unaltro fiorini 1000. a far capo danno. E in capo de .5. anni colui gli rende fiorini 2500. Domando a quanto fo p̄stata la ß. el mese. o vero el fiorin. Molti grossolani e inexperti in larte, a uno ditto simili domande non si potere solvere e non dican bene, e sonno heretici in larte, commo qui in questa. e in la sequente se dimostrera. Conciosia cosa che del merito a capo danno, procede sempre in la continua proportionalita. Dico adonca che in questa richiesta se ricercano 6. numeri p̄portionali in continua proportionalita. li quali. el primo e el capitale prestato. Cioe. 1000. El secondo e capitale e merito del primo.

del quale riportiamo la (molto libera) traduzione:

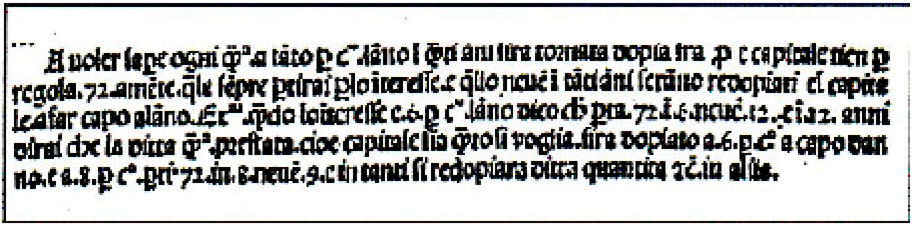
" Uno presta ad un altro fiorini 1000 a far capo all'anno. E incapo di 5 anni colui gli rese fiorini 2500. Domando a quanto fu prestata la somma

---

[20] Nepero, nome italianizzato di John Napier, scozzese che nel 1614 pubblicò *Mirifici logarithmorum canonis descriptio,* dedicata alla descrizione dei logaritmi da lui ideati.

al mese ovvero il fiorino. Molti grossolani e inesperti nell'arte hanno detto che simili domande non si possono risolvere e non dicono bene, e sono eretici nell'arte come qui in questa e nel seguito si dimostrerà. Siccome (conciosiacosaché) il merito a capo dell' anno procede sempre in progressione continua, dico dunque che in questa richiesta si ricercano 6 numeri proporzionali dei quali il primo è il capitale prestato, cioè 1000, il secondo capitale più merito del primo…."

Più avanti, nello stesso trattato (cap. 43), Pacioli affronta un altro problema che oggi si risolve con una equazione logaritmica[21]: quello di calcolare il tempo di raddoppio di un capitale.



Distinctio nona, tractatus quintus, 73

Il modo con cui il problema è stato risolto fu ampiamente trattato anche in passato (G.Vacca, *The first napier logaritm calculated before Napier*, in *The Napier Tercentenary Memorial Volume*, Edimburgo 1915. R. Vacca, *Anche tu matematico*, Garzanti 1989). A differenza dei problemi sulle progressioni, questo ha una soluzione approssimata e noi faremo vedere come PACIOLI sia riuscito a raggiungere una buona approssimazione. Egli afferma che il tempo di raddoppio anzidetto è dato dalla formula

$$\mathbf{t = 72/r}$$

essendo **r** il tasso e **72** un numero fisso. Proveremo a vedere di quanto il valore fornito dalla formula del frate si discosta dalla realtà usando i mezzi di

[21] Si definisce $\log_a(x)$ l'esponente al quale bisogna elevare la base a per ottenere x. L'importanza dei logaritmi è che trasformano i prodotti in somme, i rapporti in sottrazioni e le potenze in prodotti secondo le seguenti proprietà:

a) $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$

b) $\log_a(x/y)=\log_a(x)-\log_a(y)$

c) $\log_a(x")=y*\log_a(x)$

calcolo che abbiamo a disposizione oggi e cercheremo di capire perché, nella pratica di quei tempi, era usata proprio la costante 72.

Detto **C** il capitale a disposizione, **t** il tempo di impiego e **r** il tasso di interesse (interesse per **100** lire), è ben noto che la legge che fornisce il montante è

$$\mathbf{M = C(l+r/lOO)^t}$$

per cui il tempo **t** di raddoppio di un capitale è quel valore di **t** che soddisfa l'equazione

$$\mathbf{2C = C(1+r/100)^t}$$

che, dividendo ambo i membri per **C**, diventa

$$\mathbf{2 = (l+r/100)^t}$$

la quale, passando ai logaritmi[22] ad ambo i membri equivale alla

$$\mathbf{\log(2) = \log(1+r/100)^t}$$

e applicando una ben nota proprietà dei logaritmi[23]

$$\mathbf{t*\log(l+r/100) = \log(2)}$$

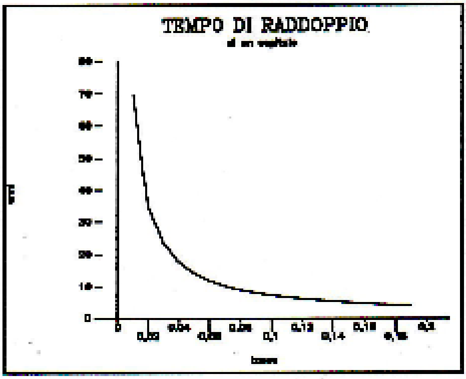
da cui, esplicitando **t**

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{\log(2)}}{\mathbf{\log(l+r/100)}} \quad (2)$$

Ecco come il tempo di raddoppio dipenda da r. La funzione che esprime t in funzione di r ha il seguente grafico, disegnato con l'aiuto di un foglio elettronico.

---

[22] Si scrive log(x) in luogo di $\log_{10}(x)$
[23] È la proprietà che afferma che $\log_a(x^y)=y*\log_a(x)$



Tempo di raddoppio di un capitale. Dipendenza del tempo dal tasso.

G.Vacca, nel lavoro citato, asserisce che la costante 72 della formula (1) è una approssimazione ante litteram di log (2). Perché?

La legge di Taylor-Mac Laurin[24] per lo sviluppo in serie delle funzioni afferma che

$$\mathbf{log(l+x) = x - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \ldots \qquad (3)}$$

Approssimando la (3) al termine di secondo grado si ha

$$\mathbf{log(l+x) = x - \frac{X^2}{2}}$$

quindi

$$\mathbf{log(l+r/100) = \frac{r}{100} + \frac{1}{2}\ \frac{r^2}{10000}}$$

$$\mathbf{log(l+r/100) = \frac{200\,r + r^2}{20000}}$$

[24] La Legge di Taylor-Mac Laurin afferma che ogni funzione si può scrivere come un polinomio di infiniti termini. In particolare, la funzione log(l+x) è espressa dalla (3)

e sostituendo nella (2)

$$t = \frac{\log(2)}{\dfrac{200r + r^2}{20000}}$$

$$t = \frac{20000}{200r + r^2} \log(2)$$

ovvero

$$t = \frac{\dfrac{20000}{200 + r} \log(2)}{r}$$

Quindi PACIOLI avrebbe approssimato 20000/(200+r)log(2) con 72.

Se invece si approssima log (l+x) al primo termine della serie di Taylor - McLaurin si ha

$$\log(l+x) = x$$

e quindi

$$\log(l+r/100) = r/100 \qquad (4)$$

e quindi, sostituendo nella

$$t= \frac{\log(2)}{\log(l+r/100)} \quad (2)$$

si ottiene

$$t = \frac{\log(2)}{r/100}$$

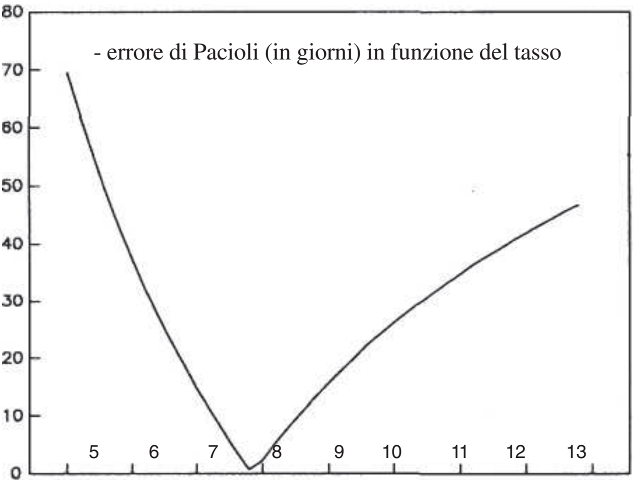
e siccome log(2) = 0,693...

$$t = \frac{\log(2)}{r/100} = \frac{0{,}693}{r/100} = \frac{0{,}693}{r}$$

per cui confrontando quest' ultima con la (1) si vede come PACIOLI approssima 1001og(2) = 69,3 con 72 che è una buona approssimazione.

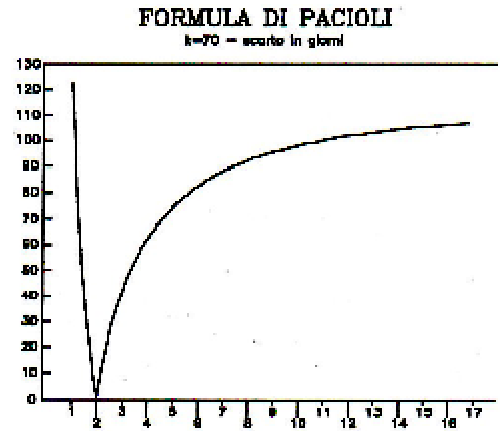
Ma è vero che PACIOLI ha anticipato Nepero e quindi ha calcolato un logaritmo prima della sua invenzione? No. Per renderci conto osserviamo i seguenti grafici.

FORMULA DI PACIOLI
scarto in giorni



Il primo mostra la differenza tra i valori di **t** dati dalla (2) e quelli forniti dalla (1), misurati in giorni in funzione del tasso **r**. Nel prossimo grafico invece abbiamo simulato ciò che accadrebbe se PACIOLI avesse adottato come costante 70 e non 72; esso dà infatti la differenza tra i valori di **t** dati dalla (2) e quelli forniti dalla

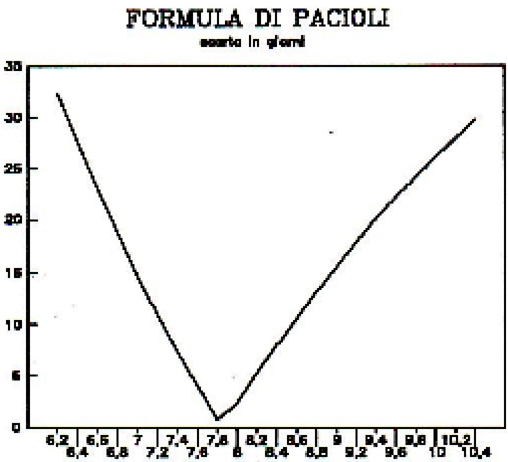
$$t = 70/r$$



- errore in giorni in funzione del tasso tra i valori reali e t=70/r

L'ultimo fornisce infine la differenza tra i valori della (2) e quelli della

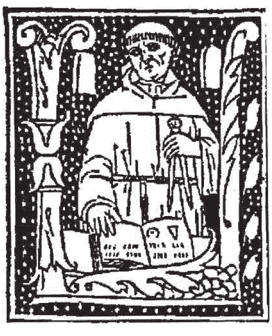
t = 74/r



- Errore di Pacioli (in giorni) e intervallo dei tassi in cui tale errore è minore di trenta

È evidente come i valori della differenza siano molto piccoli se il tasso **r** è intorno al valore 8 quando la costante è 72, al valore 2 se la costante è 70 e al valore 14 se la costante è 74. Probabilmente quindi, nel mercato di Venezia (la città ove Pacioli molto ha vissuto e lavorato), in quel periodo i tassi correnti erano intorno all'8% e questo giustificherebbe perché la scelta del 72. Bisogna osservare ancora che abitualmente i luoghi di ritrovo e le occasioni di pagamento erano i mercati che si tenevano in genere con cadenza mensile: quindi, il minimo errore concesso nella valutazione del tempo, era il mese. Come si vede dal grafico la formula di Pacioli dà un errore più piccolo di 30 giorni nell'intervallo di tassi che va dal 6,5% al 11,5% e quindi, in questo intervallo, si può considerare esatta.

Con ogni probabilità allora Pacioli non avrebbe precorso i tempi intuendo il lavoro di Nepero sui logaritmi, ma si sarebbe limitato a codificare l'esperienza di fatti e regole usati abitualmente e che portavano per esperienza concreta a risultati sostanzialmente giusti.



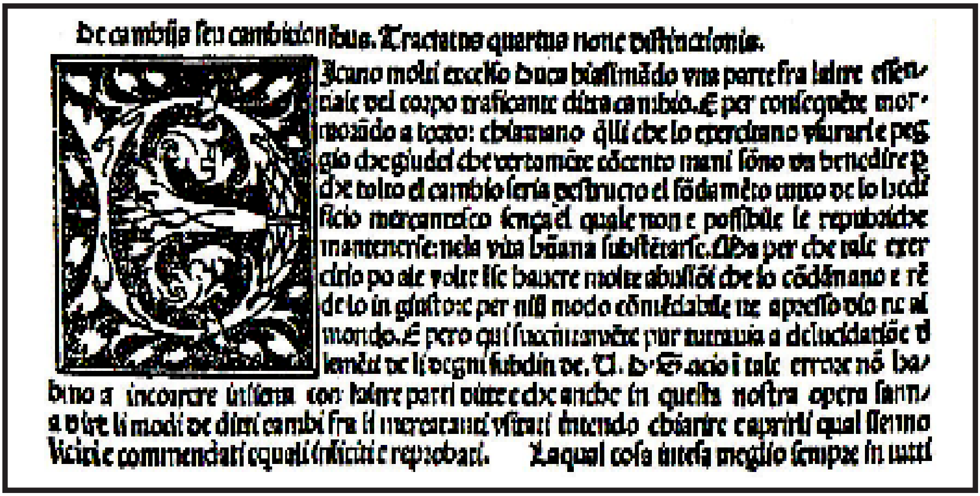
LA CAMBIALE

L'argomento trattato nella **distinctio nona, tractatus quintus**, è "Ordine a saper tenere ogni conto e scripture e del quaderno in Vinegia". Esso rappresenta senz'altro la parte più nota dell'opera perché è la sistemazione della tenuta dei libri contabili in partita doppia. Questa parte dell'opera di Pacioli è stata, nel corso dei secoli, senz'altro la più studiata; estratta dalla *Summa* e chiamata *Trattato de' computi e delle scritture*, è stata tradotta in periodi diversi e in diverse lingue[25].

Nel trattato quarto della medesima distinzione, invece, Pacioli tratta i "Cambi reali secchi fittizzi e diminuti over comuni"; la parte è molto interessante perché si assiste per la prima volta alla codifica scritta della cambiale. Il documento originale è il seguente

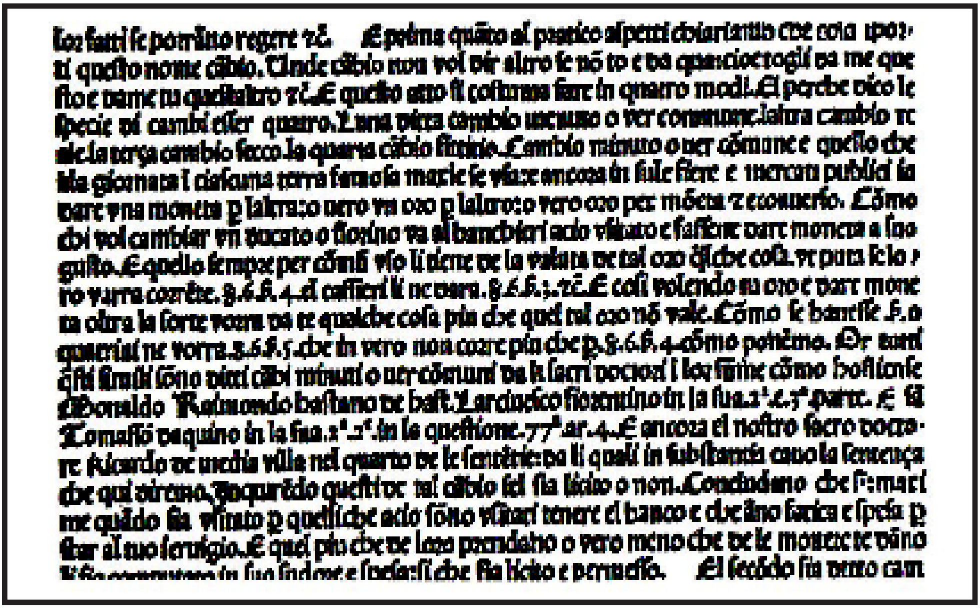
La traduzione:

Dicano molti, eccelso duca, biasimando una parte tra l'altre essenziale del corpo trafficante detta cambio. E per conseguenze mormorando a torto: chiamano quelli che lo esercitano usurai e peggio che Giudei che

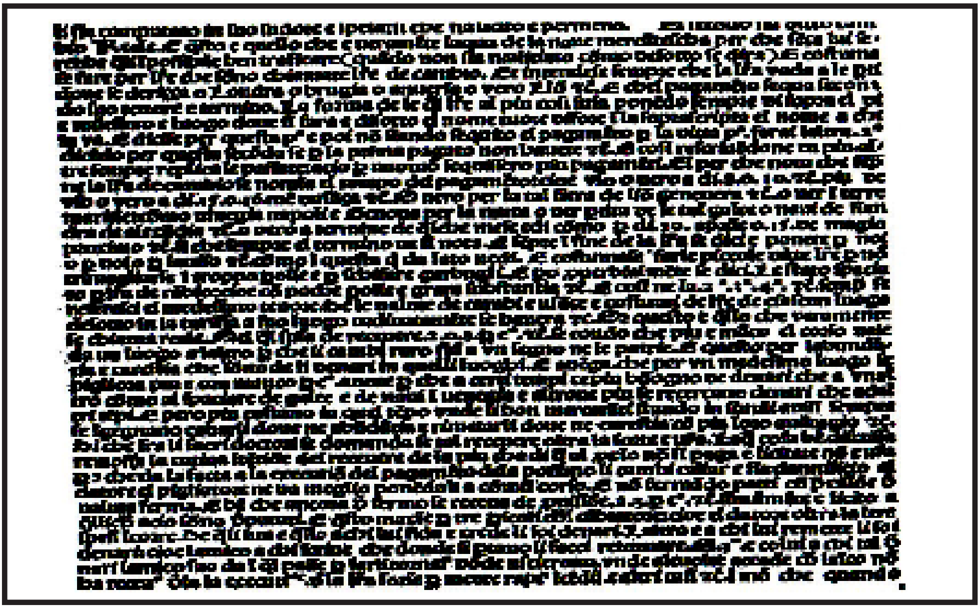

De cambiis seu cambitionibus. Tractatus quartus none distinctionis.
Dicano molti excelso duca biasimãdo una parte fra laltre essen-
ciale del corpo trafficante ditta cambio. E per consequẽtie mor-
morãdo a torto: chiamano qlli che lo exercitano usurari e peg-
gio che giudei che certamẽte cõtento mani sono da benedire p
che tolto el cambio seria destructo el fõdamẽto tutto de lo hedi-
ficio mercantesco senza el quale non e possibile le republiche
mantenerse ne la vita humana substẽtarse. Ma per che tale exer
citio po ale volte lie havere molte abusiõi che lo cõdẽnano e rẽ
de lo iniusto: e per nullo modo cõmẽdabile ne apresso dio ne al
mondo. E pero qui succintamẽte pur acertare a delucidatiõe d
tutti de li degni subditi de. V. D. S. acio i tale errore nõ ha-
bino a incorrere insiema con laltre parti utile e che anche in questa nostra opera sonn-
a dire li modi de diversi cambi fra li mercatanti usitati intendo chiarire capitoli qual sienno
licitie commendati e quali illiciti e reprobati. La qual cosa intesa meglio sempre in tutti

---

[25] Si ricorda la traduzione del prof. V.Gitti stampata a Torino nel 1878 dalla Tip. e Lit. Camilla E Bertolero e ristampata nel 1987 da Cacucci editore di Bari. Si ricorda anche la traduzione commentata in tedesco di Ernesto Ludovico Jager *Lucas Paccioli und Simon Stevin nebst einigen jungerens ...* - Stoccarda 1876.



loro fatti se porriano regere ꝛc. E prima quãto al pratico aspecti dichiarando che cosa impor-
ti questo nome cãbio. Unde cãbio non vol dir altro se nõ to e da quãcioe togli da me que
sto e dame tu quellaltro ꝛc. E questo atto si costuma fare in quattro modi. El perche dico le
specie di cambi esser quattro. Luna dicta cambio menuto o ver commune. laltra cambio re
ale. la terza cambio secco. la quarta cãbio fictitio. Cambio minuto o ver cõmune e quello che
sta giornata i ciascuna terra famosa maxie se vsa: ancora in sule fiere e mercati publici sa
dare vna moneta p laltra; o vero va oro p laltro: o vero oro per mõeta ꝛ econuerso. Cõmo
chi vol cambiar vn ducato o fiorino va al banchieri acio vidato e fassene dare moneta a suo
gusto. E quello sempre per cõmũ vso li tiene de la valuta de tal oro qlche cosa. de pura sel lo-
ro varra corrẽte. β.6.d.4. el cassieri li ne dara. β.6.d.3. ꝛc. E cosi volendo tu oro e dare mone
ta oltra la sorte voria da te qualche cosa piu che quel tal oro nõ vale. Cõmo se banchie .d.o
quatrini ne vorra .β.6.d.5. che in vero non corre piu che p. β.6.d.4. cõmo potiamo. Or tutti
qsti simili sono dicti cãbi minuti o ver cõmuni da li sacri doctori i loro summe cõmo hostiense
Monaldo Raimondo bastano de bast. Larcivescho fiorentino in la sua.2ª.e.3ª parte. E sã
Tomasso daquino in la sua .2ª.2ᵉ. in le questione .77ª.ar.4. E ancora el nostro sacro docto-
re Ricardo de media villa nel quarto de le sentẽtie: da li quali in substantia cavo la sentença
che qui diremo. Requirẽdo questi de tal cãbio sel sia licito o non. Concludano che sumarie
mẽ quãdo sia vsitato p quelli che acio sono vsitati tenere el banco e che ãno fatica e spesa p
star al suo servigio. E quel piu che de loro prendano o vero meno che de le monete de dano
li sia concesso in suo salario e sostentatiõ che sia licito e permesso. El secõdo sia detto cam



certamente con cento mani sono da benedire perché toltoli cambio sarebbe distrutto il fondamento tutto dell'edificio mercantesco senza il quale non è possibile chele repubbliche si mantengano: nella vita umana sostenersi. Ma perché tale esercizio può avere molte abusioni[26] *che lo condannano e lo rendono ingiusto: e per nessun modo commendabile*[27] *né presso dio né presso il mondo. E perciò qui succintamente a delucidazione dei degni sudditi di U.D.S. affinchè in tale errore non abbiano a incorrere insieme alle altre parti dette e che anche in questa nostra opera sanno a dire i modi di detti cambi usati tra i mercanti intendo chiarire e aprirli quali siano leciti e commendati e quali illeciti e riprovati. La qual cosa intesa meglio sempre in tutti i lor fatti si potranno reggere.*

E quanto prima al pratico aspetti chiariamo che cosa sia questo nome cambio. Onde cambio non vuoi dire altro se non to e da qua[28]*: cioè togli da me questo e dammi tu quest'altro. E questo atto si costuma* [29] *farlo in quattro modi. II perché dico le specie di cambio essere quattro. L'una detta cambio minuto ovver comune, l'altra cambio Reale, la terza cambio secco, la quarta cambio fittizio. Cambio minuto ovver comune è quello che alla giornata in ciascuna terra famosa si usa: e ancora sulle fiere e mercati pubblici nel dare una moneta per l'altra: ovvero un oro per l'altro: ovvero oro per moneta e commercio. Come chi vuoi cambiare un ducato o fiorino va dal banchiere a ciò usitato*[30] *e fassene dare una moneta a suo gusto. E quello sempre per uso comune si tiene del valore di tale oro qualche cosa. Supponi che l'oro valga 6.4 il cassiere gliene darà 6.3. E cosi' volendo tu oro e dare moneta... vorrà da te qualcosa in più di quello che vale tale oro. Come se baratti quattrini ne vorrà' 6.5 che pero non corre più che 6.4 come ponemmo. E così tutti quelli simili sono detti cambi minuti ovver comuni dai sacri dottori nelle loro summe cornine sostenne Monaldo Raimondo ...L'arcivescovo Fiorentino ... E San Tommaso d'Aquino... E ancora il nostro sacro dottore Riccardo di media villa nel quarto delle sentenze: dai quali*

---

[26] molti abusi.
[27] raccomandabile
[28] detto ancora abbastanza comune per indicare maniere spicciole.
[29] si usa.
[30] preposto.

in sostanza cavo la sentenza che qui diremo. Disquisendo questi se tal cambio sia lecito o no. Concludono di si: specie quando sia usato da per quelli che a questo sono usitati e che hanno fatica e spesa per stare al tuo servizio. E quel più che loro prendono ovvero meno che delle monete ti danno sia calcolato in suo sudore e spesa: cosi che sia lecito e permesso.

Il primo tipo di cambio è chiamato cambio minuto o comune e consiste nel fatto che chi è preposto a cambiare moneta in oro o oro in moneta fa un certo guadagno in questa operazione; si tratta in sostanza del cambio manuale di oggi. È lecita questa operazione? Sono leciti i guadagni che fanno gli operatori del settore? La conclusione è si, a patto che a gestire il cambio siano persone a ciò ufficialmente addette e il cambio non sia “al nero”

Il secondo sia detto cambio reale. E questo è quello che è veramente l’acqua della nave mercantesca[31] perché senza di lui sarebbe quasi impossibile ben trafficare (quando non sia maliziato come di sotto si dirà). E costuma farsi per lettere che sono chiamate lettere di cambio: e si intende che la lettera vada sempre alle parti dove si indirizza o Londra o Buges o Anversa ovvero Lione. E che il pagamento segua secondo suo tenore[32] e termine. La forma delle quali lettere per lo più si usa ponendo di sopra el di e mollisimo e luogo dove si farà e di sotto el nome tuo: e di fuori alla soprascritta il nome a chi la va. E dicesi per questa prima e poi non facendo seguito il pagamento per la detta prima farai l’altra seconda dicendo per questa seconda se la prima pagato non avete. E così scrivendone tu più altre sempre replica le passate: acio per uno[33]: non seguissero più pagamenti. E per questo nota che sempre nella lettera di cambio si nomina il tempo del pagamento: ciò è uso ovvero a di 8 o 10 più usato ovvero a di 15 o 16 men d’usanza. Ovvero per la tal fiera... ovvero in terre marittime come Venezia Napoli e Genova per la muta o la partenza delle tal galee o navi per le Fiandre o Alessandria ovvero a termine di qualche mese e giorno come 20 aprile o 15 maggio prossimo così che sempre il termine[34]

[31] È importante come l’acqua per la nave dei mercanti.
[32] Scadenza.
[33] eacio per uno = e questo per un motivo.
[34] Come in questa che da lato vedi = come nell’esempio a lato. L’esempio è tradotto subito dopo.

vi si noti. E sempre alla fine della lettera si dice e ponete per noi come in questa che da lato vedi (*). E si costuma farle piccole queste lettere per non travagliarle in troppe polle come n questa che da lato vedi e per schivare garbugli....

1494, addì 9 ,agosto in v.[35]

Pagate per questa prima nostra a Ludovico de Francesco da Fabriano e compagni once cento d'oro napoletane in su la prossima fiera di Foligno per la valuta d'altrettanti ricevuti qui dal magnifico orno messer Donato da legge certo messer Priamo. E ponete per noi. e dio vi guardi dal male.

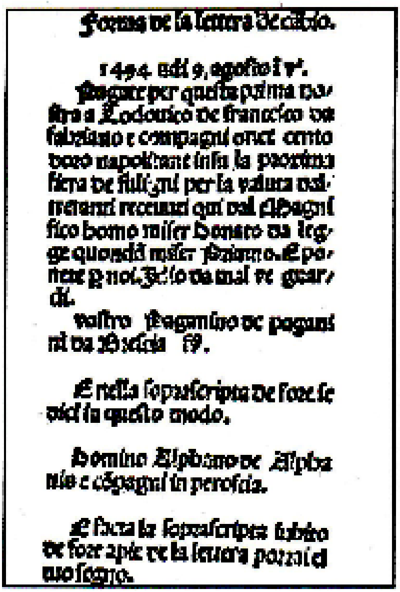
Vostro Paganino de Paganini da Brescia.

E nella soprascritta di fuori si dice in questo modo.

Domino Alfano de Alfanis in Perugia.

E fatta la soprascritta subito di fuori in fondo alla lettera porrai il tuo segno.

Nelle pagine precedenti è riportata la fotografia dell'esempio della lettera di cambio che Luca Pacioli presenta nella *Summa* a margine della descrizione dei vari tipi di cambio.


Forma de la lettera de cãbio.

1494 adi 9, agosto i v.
Pagate per questa pma no/stra a Lodouico de francesco da fabriano e compagni once cento doro napolitane insu la proxima fiera de fuligni per la valuta dal/tretanti receuuti qui dal Magni/fico homo miser Donato da leg/ge quondã miser Priamo. E po/nete p noi. E dio da mal ve guar/di.
vostro Paganino de pagani/ni da Brescia ß.

E nella soprascripta de fore se/dici in questo modo.

Domino Alphano de Alpha/nis e cõpagni in perosia.

E facta la soprascripta subito de fore apie de la lettera porrai el tuo segno.

[35] V.=Venezia

Sergio Casini*

Tra numeri e sezioni: pensando e dialogando

Per iniziare…

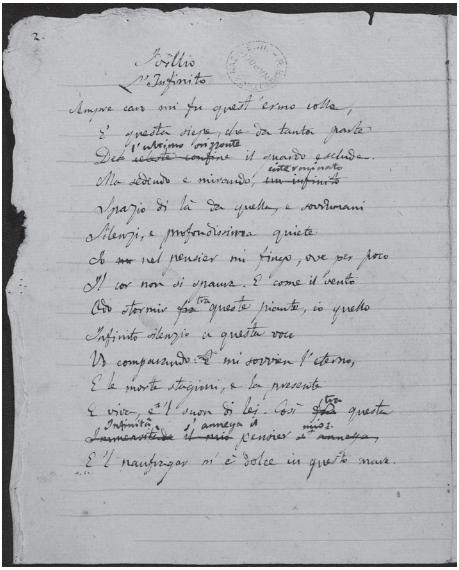
> “Non hai veramente capito qualcosa fino a quando non sei in grado di spiegarlo a tua nonna.”
> **A. Einstein**

Caro Mario, non so se Pacioli abbia plagiato Piero o qualcun altro; la cosa certa è che ha pensato alla nonna.

La Divina Proporzione

> La Geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l’ altro è la Sezione Aurea di un segmento.
> Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d’ oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.
> **Johannes Kepler [1571-1630]**

> “Commo Idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intendere, così questa nostra proportione non se po mai per numero intendibile asegnare, nè per quantità alcuna rationale exprimere, ma sempre fia occulta e secreta e da li mathematici chiamata irrationale”.
> **Luca Pacioli [1445-1514?]**



Idillio
L'Infinito
Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
E questa siepe, che da tanta parte
Dell'ultimo orizzonte ~~estremo confine~~ il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminato ~~un infinito~~
Spazio di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quiete
Io nel pensier mi fingo, ove per poco
Il cor non si spaura. E come il vento
Odo stormir tra ~~fra~~ queste piante, io quello
Infinito silenzio a questa voce
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
E le morte stagioni, e la presente
E viva, e'l suon di lei. Così tra ~~fra~~ questa
Infinità s'annega il pensier mio: ~~Immensitade il mio pensier s'annega,~~
E'l naufragar m'è dolce in questo mare.

ξναΨ618033988749894848-204586…

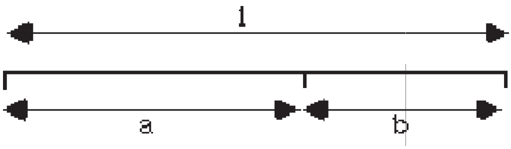
Strano numero: associa matematica e bellezza. Il "phigreco", definito rapporto aureo o anche Divina Proporzione, rappresenta armonia, sintonia estetica, per il Pacioli quasi un marchio del Mistero sulla realtà. Lo ritroviamo nella maggior parte delle forme naturali, nell'arte, nell'architettura, nella musica, nei rapporti delle distanze tra i pianeti ed il sole.

L'armonia del volto della Gioconda, l'imponente sobrietà di una cattedrale romanica o il vertiginoso slancio del gotico debbono la loro indiscutibile bellezza a quella piccola costante matematica.

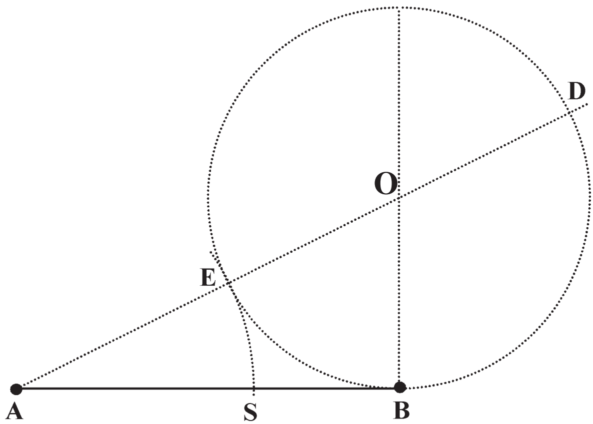
Qualche mese fa ho proposto ai miei studenti una lettura della poesia *L'infinito* di G. Leopardi ed ho pensato di consegnar loro la fotocopia del testo originale, scritta di proprio pugno dall'autore. Mi è sempre piaciuta quella paginetta e, a costo di sembrare irrispettoso per l'arte leopardiana o visionario, ho provato ad inscrivere il testo in un rettangolo. Già ad un primo, rapido approccio, il rapporto tra i lati si avvicinava sorprendentemente a ξκΛcosì ho provato a tracciare il rettangolo aureo ed il risultato è quello che si può osservare in figura.

Che cos'è la **Sezione Aurea**?

Nel 300 a.C. Euclide, nella proposizione 11 del libro II degli Elementi, si pone questa domanda: *"Come dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l'intero segmento e la parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore"*? È la stessa cosa che dire: come trovare la **Sezione Aurea** di un segmento, cioè la parte media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente di esso?



La costruzione è un classico per chiunque abbia avuto a che fare con un po' di geometria:



Il segmento AB ha la stessa misura del diametro della circonferenza di centro O e tangente in B al segmento stesso. La parte esterna della secante passante per il centro AE, opportunamente riportata sul segmento AB con un compasso di apertura AE, genera un segmento AS che è medio proporzionale tra l'intero segmento AB e la parte rimanente di esso SB. E' la sezione aurea del segmento. Con una semplice dimostrazione, infatti, si evince che

AB : AS = AS : SB

da cui:

$AS^2 = AB * SB$

ed essendo

SB = AB – AS

si può anche scrivere:

$AS^2 = AB * (AB - AS) \qquad AS^2 = AB^2 - AB * AS \qquad AB^2 - AB * AS - AS^2 = 0$

e, risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto ad AB:

$$AB = \frac{AS + \sqrt{AS^2 \, \Xi 4AS^2}}{2} = \frac{AS + \sqrt{5}\ AS}{2} = \frac{(1 + \sqrt{5})\ AS}{2}$$

per cui il rapporto

$AB/AS = \dfrac{(1 + \sqrt{5})}{2}$ è il numero irrazionale ξ **[illegible]618033988749894848204586…**

Una breve digressione.

La traduzione di "irrazionale" in greco è "alogos", che significa "senza rapporto". Un numero irrazionale, infatti, non è esprimibile come rapporto tra due numeri interi ed è costituito da una sequenza infinita di cifre decimali che non si ripetono con regolarità (aperiodico). Se prendo un tavolo che ha i lati di 2 m e 4 m posso affermare che una dimensione è doppia dell'altra; in effetti il rapporto 4/2 = 2. Si dice anche che le misure dei due lati del tavolo sono commensurabili: posso cioè scegliere un segmento (unità di misura) che sia contenuto un numero intero di volte nei segmenti che esprimono la misura dei lati del tavolo (il segmento che misura 1 m è contenuto esattamente 2 volte e 4 volte nei lati minore e maggiore). Ogni volta che è possibile applicare questo procedimento incontriamo rapporti generati da numeri interi: ciascuno di questi rapporti può essere rappresentato da un numero razionale. Ma quando i Pitagorici provarono ad applicare il procedimento al lato del quadrato e alla sua diagonale si trovarono di fronte ad una realtà sorprendente e nuova: nessun segmento unità di misura poteva essere riportato un numero intero di volte sul lato e sulla diagonale: le due misure erano e sono incommensurabili. Il numero con il quale si esprime questo rapporto è $\sqrt{2}$, cioè il numero irrazionale 1,414213…

La stessa cosa accade quando si ripeta il tentativo con il raggio della circonferenza e la misura della stessa; questa volta il numero, sempre rigorosamente irrazionale è $\pi = 3{,}141592...$

$\sqrt{2}$, π,ΛξΗΛ sono alcuni dei simboli di un linguaggio che ci consente di interpretare la realtà, mai come imposizione, ma sempre come scoperta: li ritroviamo sorprendentemente come esito delle nostre osservazioni, come fossero mattoni che sostengono l'architettura dell'universo; e nell'architettura del Partenone o delle facciate delle nostre cattedrali usiamo la Divina Proporzione come parametro di armonia e bellezza.

L'alfabeto della natura è complesso e pur tuttavia non inaccessibile, se si accetta di rinunciare ad ingabbiarlo entro lo schema angusto di un numero finito di lettere.

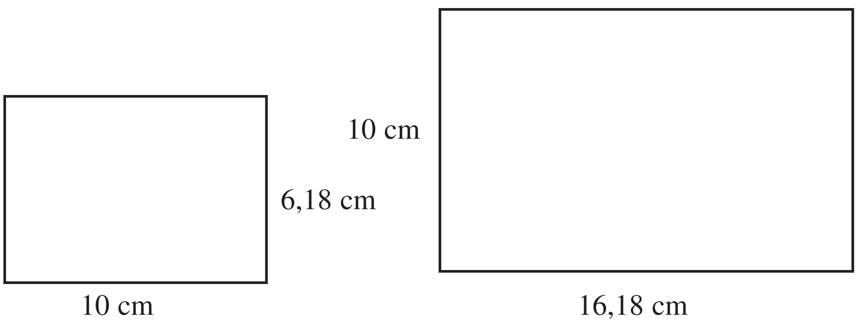
Ho sempre immaginato di correre partendo dalla virgola fino all'ultimo decimale di un numero irrazionale: so qual è il passo successivo ma non posso raggiungere la fine.

"Natura umana, or come se' in tutto e vile e frale
Se polve ed ombra sei tant'alto senti? "
(G. Leopardi)

Alcune proprietà di ξ·.

Sezione aurea e frattali.

Ogni segmento è sezione aurea della sua somma con la sua sezione aurea e tolta la sezione aurea la parte rimanente di un segmento è la sezione aurea della sezione aurea del segmento.

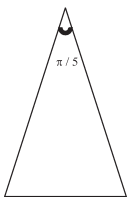


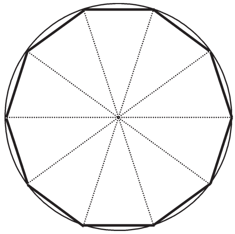
10/6,18= ξΛΛ quindi il lato minore è sezione aurea del lato maggiore, mentre la somma dei due lati è ancora un segmento di cui il lato maggiore del rettangolo di partenza (10 cm) è sezione aurea. Infatti: 16,18/10 = ξ·.

Ovviamente vale anche l'inverso: partendo dal rettangolo più grande, se dalla misura del lato maggiore tolgo quella del minore (sua sezione aurea), ottengo 6,18 che è sezione aurea di 10 (vedi rettangolo più piccolo).

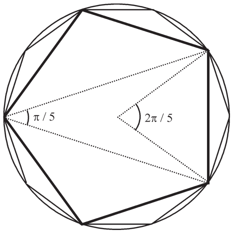
ξΛ e · .

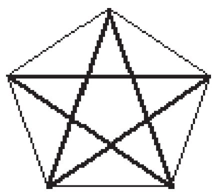
Se in un triangolo isoscele l'angolo al vertice è di ·⊥ε allora la base è la sezione aurea del lato.





Un decagono regolare inscritto in una circonferenza è costituito da 10 triangoli di questo tipo, per cui la base di ciascuno di essi è la sezione aurea del raggio. Unendo i vertici del decagono, saltandone ogni volta uno, si ottiene un pentagono regolare: tracciando due diagonali dallo stesso vertice si ottiene un triangolo aureo. Tracciando inoltre tutte le diagonali si ottiene la stella a cinque punte, che i Pitagorici scelsero come loro simbolo, le diagonali si intersecano secondo le loro sezioni auree.

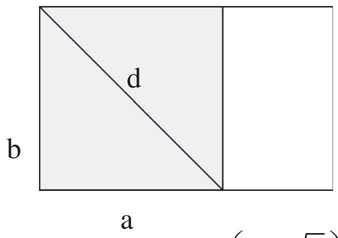




Si osservi inoltre, come curiosità, che il rapporto ·⊥ε è molto vicino ad 1/ξ·.

ξΛ e $\sqrt{2}$.

Se si divide un rettangolo aureo in un quadrato di lato pari al suo lato minore e in un rettangolo, quest'ultimo sarà ancora un rettangolo aureo. Infatti:



$$\frac{a}{b} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \longrightarrow a = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) * b$$

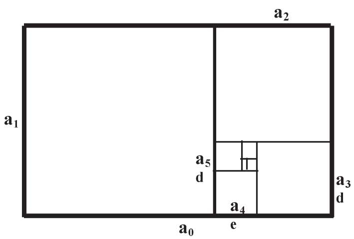
Nel nuovo rettangolo, il rapporto tra i lati b ed (a-b) sarà:

$\frac{b}{a\text{-}b}$ e, sostituendo ad a la relazione precedente, $\frac{b}{a-b} = \frac{b}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) * b - b} =$

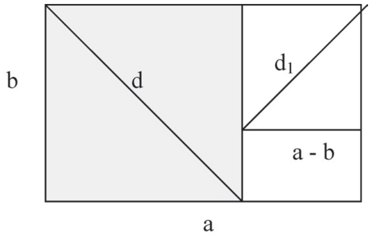
$\frac{b}{\frac{b+\sqrt{5}b-2b}{2}} = \frac{b}{b\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$ che, semplificando b e razionalizzando

diventa, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ cioè ancora ξ·.

Se ora dividiamo il rettangolo aureo più piccolo allo stesso modo di prima e ripetiamo l'operazione per quante volte desideriamo, ci si accorge che potremmo andare avanti all'infinito. Inoltre, essendo uguale a ξΛil rapporto tra il lato maggiore e quello minore dei rettangoli aurei che si formano per successive divisioni, sarà sempre vero che il lato maggiore è minore del doppio del lato minore. Partendo da qualunque altro rettangolo, che non sia quello aureo e che goda di quest'ultima proprietà, il numero di divisioni possibili secondo il metodo sopra descritto sarà sempre finito: ci troveremo cioè, prima o poi, di fronte ad un rettangolo il cui lato maggiore misurerà più del doppio di quello minore.



Si osservi inoltre che il rapporto tra le diagonali dei quadrati che si formano nelle successive divisioni dei rettangoli aurei è sempre uguale a ξ:ΛInfattiφ



$d = \sqrt{2}b$ e $d_1 = \sqrt{2}(a\text{-}b)$. Ne consegue che: $\frac{d}{d_1} = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}(a-b)}$, cioè $\frac{b}{(a-b)}$ che, come già dimostrato è uguale a ξ:.

Se poi andassimo a calcolare il rapporto tra il lato maggiore del rettangolo aureo e la diagonale del quadrato inscritto scopriremmo una interessante relazione tra i due numeri irrazionali: risulta infatti $\frac{a}{d} = \frac{a}{\sqrt{2}b}$, ma essendo $\frac{a}{b}$ = ξΨΛne consegue che $\frac{a}{d} = \frac{\Phi}{\sqrt{2}}$.

Ovviamente la divisione sopra illustrata sarà possibile anche all'inverso, costruendo cioè rettangoli e quadrati sempre più grandi.

Proviamo ora, dato il solito rettangolo aureo di lati a e b, a definire le misure dei lati maggiori dei rettangoli ottenuti con la costruzione di cui sopra: dunque per il primo rettangolo il lato maggiore misura a, per il secondo b, per il terzo a-b, per il quarto 2b-a e così via. Ogni lato successivo è dato dalla differenza dei due che lo precedono, secondo la sequenza:

a		bξ
b		b
a – b		b(ξZαY
2b – a		b(2-ξY
2a - 3b	o, se preferiamo, essendo a=bξ	b(2ξZχY
5b – 3a		b(5-3ξY
5a – 8b		b(5ξZηY
13b – 8a		b(13-8ξY
....		....

Ci troviamo in presenza di una successione numerica $a_n = a_{n-2} - a_{n+2}$, cioè di una serie di numeri per i quali sarà possibile stabilire una relazione univoca che leghi ciascun termine al successivo. In questo caso la legge è: sottrai gli ultimi due termini della successione troverai il successivo. Il primo termine significativo sarà il terzo, ottenuto appunto per differenza tra i primi due. I primi

due termini, scelti a piacere purchè siano rigorosamente in un rapporto aureo tra di loro, costituiscono la base del nostro castello, essendo misura dei due lati del rettangolo aureo di partenza. Se osserviamo i coefficienti di ξΛ presi in valore assoluto (cioè con segno comunque positivo), e partendo dal terzo otteniamo:
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 ………..

Davvero sorprendente! Ci troviamo in presenza della famosa successione di Fibonacci (1170-1250), il grande matematico pisano. Ma, fatto davvero incredibile, se consideriamo il rapporto tra un elemento della successione e quello che lo precede, andando avanti ci approssimiamo sempre di più al nostro ormai familiare numero aureo: ξ·. Infatti, se osserviamo la tabella

Successione di Fibonacci	Rapporto tra il termine successivo ed il precedente
f_n	**f_n/f_{n-1}**
1	
1	1,00000000
2	2,00000000
3	1,50000000
5	1,66666667
8	1,60000000
13	1,62500000
21	1,61538462
34	1,61904762
55	1,61764706
89	1,61818182
144	1,61797753
233	1,61805556
377	1,61802575
610	1,61803714
987	1,61803279
1597	1,61803445
2584	1,61803381
4181	1,61803406
6765	1,61803396
…	…

Si osserva facilmente che, dopo i primissimi valori, il rapporto converge rapidamente a ξ·.

Due particolarità algebriche.

$$\text{Essendo } \xi\Lambda\nu\Lambda\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{Nallora}\Lambda\xi^{\beta}\Lambda\Lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\Lambda\Lambda\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\Lambda\Lambda\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Lambda\nu\alpha\Xi\Lambda\frac{1+\sqrt{5}}{2}\therefore$$

$$\text{Quindi } \xi\ {}^{\beta}\nu\Lambda\alpha\Lambda\Xi\Lambda\xi\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\xi\!\!\xrightarrow{\hspace{2em}}\!\!\nu\sqrt{1+\Phi}\,\nu\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}\,\nu\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}\,\nu$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}}}\ \ldots\ldots\ldots$$

ξΛpuò essere espresso nella forma della ben nota radice continua.

Allo stesso modo, essendo

$$\xi\Lambda\nu\Lambda\alpha\Lambda\Xi\Lambda\frac{1}{\Phi}$$

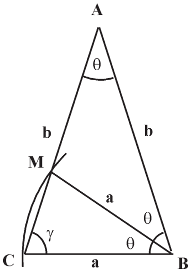
Infatti

$$1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}+2}{1+\sqrt{5}}=\frac{3+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\text{ che, razionalizzato, diventa }\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{, cioè } \xi\cdot.$$

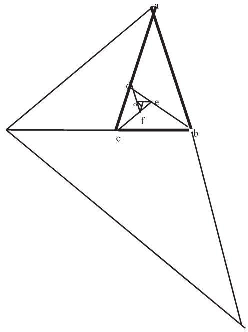
Si può allora costruire un'altra interessantissima serie di uguaglianze:

$$\xi\Lambda\nu\Lambda\alpha\Xi\Lambda\frac{1}{\Phi}\Lambda\nu\Xi\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}\Lambda\nu\alpha\Xi\Lambda\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}\Lambda\nu\alpha\Xi\Lambda\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}}\Lambda\Lambda\ldots\ldots\ldots.$$

ξΛpuò essere rappresentato anche sottoforma di frazione continua, oltre che di radice continua.



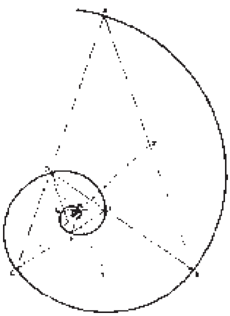
Torniamo per un attimo al triangolo isoscele con angolo al vertice di ·⊥ε che Ąpotremmo a buona ragione definire "aureo": se tracciamo la bisettrice di uno degli angoli alla base, scopriamo che il triangolo CBM è ancora un triangolo aureo. Dividendo successivamente il triangolo CBM, allo stesso modo di quello di partenza, otterremo ancora una sequenza infinita di divisioni, con tagli sempre rigorosamente proporzionali e sempre più piccoli (o più grandi se procediamo all'inverso).

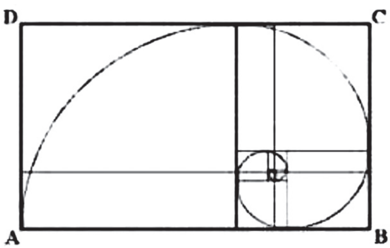


Non sarà difficile osservare la stretta analogia con le divisioni del rettangolo aureo, fatta in precedenza.

La spirale logaritmica, o spirale aurea.

Se la costruzione dei triangoli o dei rettangoli avviene sempre utilizzando lo stesso verso di rotazione si scopre che, unendo opportunamente i vertici, otteniamo una spirale perfetta. Basti pensare alla definizione che ne dette Jacob Bernoulli: "*Spira mirabi-lis*" (spirale meravigliosa). Lo stesso Bernoulli volle che la spirale fosse scolpita sulla sua tomba con la frase "*Eadem mutata resurgo*" (sebbene cambiata, ritorna come prima). E' la spirale descritta dalla puntina di un giradischi, con la differenza che non ha polo e riproduce sempre se stessa, attraverso successivi ingrandimenti o riduzioni. Se ci mettessimo a zummare questa spirale, in un senso o nell'altro, troveremmo sempre la spirale stessa.





Molte e sorprendenti sono le sue proprietà. Ne cito solo alcune:

- la sua evoluta è ancora una spirale logaritmica, quindi anche la sua involuta (vedi effetto zoom);
- la sua pedale rispetto al polo è una spirale ad essa uguale; in effetti la spirale, come già detto, non ha polo, cioè non ha un punto di origine; si capisce questa proprietà ricordando che i triangoli (o i rettangoli) costruiti in direzione del *sempre più piccolo* consentono al disegnatore una serie infinita di passaggi.
- la sua inversa è ancora una spirale logaritmica;
- la sua radiale è la spirale stessa moltiplicata per un coefficiente di scala.

Si comprende l'esclamazione di Bernoulli! Ma, credo, si comincia a comprendere anche perché Luca Pacioli abbia voluto attribuire alla Proporzione che ha per rapporto ξΛl'appellativo di Λ"Divina".

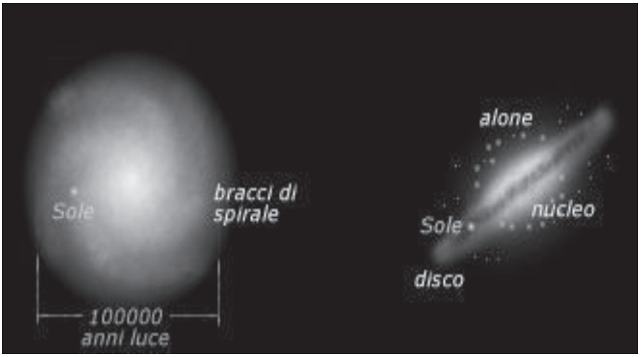
Ma vorrei ora spiegare perché ho dato a questa sezione il titolo di "Sezione Aurea e frattali".

La nascita dei frattali viene quasi sempre attribuita a Mandelbrot (matematico polacco nato nel 1924, vivente), ma la loro descrizione si trova già negli scritti di matematici come Cantor, Peano, Hilbert, von Koch, Sierpinski, Julia e Hausdorff. Una caratteristica fondamentale delle figure frattali è l'autosimilarità. Negli esempi prima fatti abbiamo un chiaro esempio di autosimilarità: immaginiamo di vedere in una sequenza animata le successive divisioni descritte, sia che si tratti di triangoli o di rettangoli: ad ogni passo, o fotogramma se preferiamo, assisteremmo alla comparsa di una figura simile alla precedente e rispetto ad essa ridotta (o ampliata) di un coefficiente ξ. Dunque la spirale aurea altro non è che un frattale, suggestivamente immaginabile come evoluzione o involuzione dinamica di forme sempre uguali a se stesse.

ξΨΛla spirale "aurea" e la natura.

Fino ad ora ci siamo mossi, come profani e con i piedi di piombo, tra numeri e figure geometriche. Non saprei definire che cos'è una cosa bella: so solo che le cose che abbiamo visto sono per me certamente belle. Forse anche "Divine", come direbbe Pacioli o tu, Mario, che hai sempre associato la matematica alla bellezza e la bellezza alla verità. E' vero, spesso si sente dire "Non è bello ciò che è bello, ma è bello ciò che piace"; ma si rimane sempre con il desiderio di capire che cosa ci attragga tanto nelle cose che ci piacciono. A me sembra che l'armonia dei numeri e delle forme studiate da Pacioli e da tanti altri prima e dopo di lui, la sorpresa delle scoperte e perfino la loro percezione estetica cominci a rispondere in parte all'ultima domanda: perché ci piacciono? Che cosa ci attrae? Non voglio parlare di bellezza "oggettiva", è ancora così lontana dalla nostra fragile esperienza; ma non posso non pensare ad una realtà rispetto alla quale tutti siano come costretti a riconoscere con stupore che è "bella". Quante volte i tuoi studenti ti hanno chiesto "Perché devo studiare la matematica? A che serve nella vita?" E intanto tu lavoravi a "tirar su" con lo scanner i solidi "aurei" di Pacioli nello stanzino adiacente al laboratorio di informatica. Hai sempre saputo comunicare con loro, ma forse questa è stata la risposta più convincente.

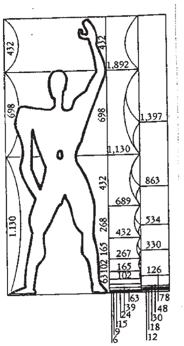
Cosa c'entra tutto questo con la realtà? Non si tratta di convincere, ma di guardare. Se seguiamo l'espansione della spirale aurea (o logaritmica) troviamo una galassia. Moltissime galassie a spirale, tra le quali anche la nostra Via Lattea, seguono questa legge e possono essere inscritte in un rettangolo aureo.



Osservando dall'alto la costa della Sardegna essa appare talmente frastagliata ed in modo talmente casuale che sembra impossibile stabilire rapporti geometrici che possano interpretarla. In realtà, operando successive zumate fino ad arrivare al singolo sassolino, ci si accorge che compare l'autosimilarità dei frattali: certe forme si ripetono in modo costante, sempre più piccole, ma rispettando rapporti costanti di similitudine. La stessa cosa accade se osserviamo una foglia o il profilo di una montagna. Molte conchiglie hanno una forma a spirale e si scopre che si tratta sempre di sezione aurea. Così pure il nautilus, un mollusco che vive nei mari tropicali è costruito su di una spirale aurea. I girasoli e le margherite hanno un numero di petali esprimibile attraverso la successione di Fibonacci. Molte parti del corpo umano sono esprimibili attraverso rapporti aurei: ad esempio l'altezza fino all'ombelico è segmento aureo dell'altezza di un uomo. Allo stesso modo: se

x =	distanza tra il gomito e l'estremità del medio	= 52,36 cm
y =	piede	= 32,36 cm
z =	spanna (tra l'estremità del pollice e quella del mignolo)	= 20 cm
t =	palmo (tra l'estremità dell'indice e quella del mignolo)	= 12,36 cm
u =	palma	= 7,64 cm

Si può verificare che t + u = z, z +t += y, y + z = x e che x/y = y/z = z/t = t/u = ∉



Spirale logaritmica di un uragano

Il nautilus

Anche la musica non sfugge ai rapporti aurei del Pacioli: se prendiamo la successione di Fibonacci

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144………..

e ne costruiamo un'altra, costituita dai rapporti tra un numero e quello che lo precede…

1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; 21/13; 34/21; 55/34, 89/55; 144/89 ……

si scopre che tali rapporti corrispondono agli intervalli musicali. Infatti:

unisono=1	1/1
ottava=2	2/1
quinta=1,5	3/2
sesta maggiore=1,666	5/3
sesta minore=1,6	13/8

L'architettura del nostro sistema uditivo, così come le misure delle canne di un organo, rappresentano rapporti aurei. Un ambiente di ascolto o una cassa acustica minimizzeranno le risonanze (disturbi) se le loro dimensioni sono rettangoli aurei.

Mi scuso per "l'elenco della lavandaia". In effetti tutti gli esempi fatti, e moltissimi altri, meriterebbero una descrizione migliore ed un maggior approfondimento. Lo scopo non è quello di voler trovare ovunque la Divina Proporzione (io ho provato anche con l'orto del mio vicino di casa), ma di riconoscere che in natura certe costanti si ripetono e consentono una interpretazione inaspettata di tante architetture e fenomeni. Gli studenti saranno soddisfatti!

Un'ultima osservazione:

Quale detective avrebbe anche solo qualche piccola speranza di successo se l'intera scena del delitto fosse un concatenarsi casuale di eventi assurdi? Non ho mai dimenticato quando, ai tempi della quarta liceo, leggevo l'Evoluzione della Fisica di A. Einstein e L. Infeld e, nell'introduzione, i due autori paragonavano la natura al romanzo giallo perfetto. Come dirà successivamente lo stesso Einstein:" La cosa più incomprensibile è che l'Universo che ci circonda sia comprensibile". L'esperienza non tradisce e l'elaborazione teorica del nostro pensiero, le stesse formulazioni astratte, se nascono dall'osservazione fedele del dato, ci consentono passi inaspettati nella comprensione della realtà. Come ogni buon detective bisogna innanzi tutto saper osservare e si osserva se si ha passione per quello che ci circonda.

C'è un punto in cui matematica, arte, poesia, musica … diventano la stessa cosa : la passione per la bellezza e per la ricerca del vero.

* È nato a Sansepolcro il 18 aprile 1956. Brillante allievo del Liceo scientifico "Piero della Francesca" negli anni 1970-1974, dopo una breve esperienza universitaria (1974-76) e di lavoro (1976-80), dal 1980 è docente di RC presso il Tecnico Commerciale "Fra Luca Pacioli" di Sansepolcro, dove ha ricoperto, ininterrottamente dal 1995, il ruolo di vicepreside. Esperto nel settore dell'informatica, è responsabile dei corsi ECDL, di cui il Liceo "Città di Piero" è test center. Dal 2004 è QM del Gruppo Qualità dell'Agenzia formativa del Liceo.

Parte Seconda

Fra Luca Pacioli divulgatore delle «matematiche»

Bernardino Baldi*
Fra Luca dal Borgo S. Sepolcro

È degno frate Luca d'essere connumerato fra quei Matematici più eccellenti de quali da noi si scriuono le uite, e ciò per essere stato ne suoi tempi diligentiss.º illustratore di queste discipline e da tutti per questa cagione molto stimato. Nacque egli ne la città del Borgo S. Sepolcro posta da fra Leandro Alberti nel ducato di Spoleti, città non molto grande ma copiosa nondimeno di persone honorate. Fu de la famiglia de Paciuoli ignobile per quanto mi credo e di poco splendore. Partissi da la sua patria assai giouane et andatosene a Venetia s'accomodò a' seruitii d'un famoso Mercatante che habitaua a la Zudecca detto ser Antonio de Rompiasi il quale con tre figliuoli Bartolomeo Francesco et Pauolo, mandaualo a la scuola de le Matematiche essendone maestro un Domenico Bragadino deputato da la Signoria di Venetia ad esser publico lettore ne le dette proffessioni. Successe questo Domenico ne la scuola ad un Pauolo da la Pergola lettore anch'egli e Canonico di S. Marco. Prese dopo Luca l'habito di S. Francesco e fecesi de la famiglia de Minori, oue entrato et attendendo con molta caldezza à gli studii e di Filosofia e di Teologia diuentò Maestro in quella sì come appare dal inscrittioni de le sue epistole dedicatorie e bene si scopre da chi legge l'opere sue ch'egli non u'attendeua infelicem.e; nondimeno assai chiaro si uede essere stato ritardato in lui lo studio Teologico da quello che con tutte le forze egli pose ne le discipline Matematiche. Fattosi frate andò per uarie parti del. mondo peregrinando desideroso d'imparare e d'insegnare altrui. Mentre che si ritrouaua inVenetia del 1470 scrisse un libro d'Algebra e dedicollo a' figli di quel Ant.° Rompiasi Mercatante di cui come si disse egli s'era ricouerato in casa. Cinque anni dopo ottenne la publica lettura de le Matematiche ne la città di Perugia oue si trattenne intorno tre anni nel qual tempo ad instanza de la giouentù de la detta città che l'udiua compose un breue trattatello de la detta arte Algebratica e dedicollo a la Giouentù med.a Perugina. Partitosi da Perugia e trasferitosi à Venetia passò né saprei con quale occasione in Zara nobile città de la Schiauonia oue del 1481 ritrouandosi compose un altro libro pur d'Algebra ma più fondato et elaborato che gli altri due primi; poiché in questo egli discorreua (com'egli dice nel primo trattato a la sesta distintione de la sua grande opera Aritmetica) de casi più suttili e forti. Tornato di nuouo in Italia fermossi in Fiorenza oue egli haueua molta domestichezza con alcuni più nobili e principali. Del 1487 fu richiamato da Perugini a la med.a lettura. Ma non ui si trattenne molto, perciochè essendo ito a Roma hebbe la publica lettura de le matematiche in quella città, oue mentre si trouaua fu deputato com'egli dice a gli ossequii d'un Mons. Pietro de Valetarii Gcnouese uescouo di Carpentrasso il quale alhora alloggiaua in casa del Car.[le] di Fois. A questo uescouo presentò il nostro frate Luca i cinque corpi regolari con altri dependenti da quelli lauorati di sua propria mano, e ciò trouandosi presente, com'egli scriue, il Duca d'Urb. Guidobaldo primo che alhora con l'occasione de la uisita di Papa Innocentio Ottauo si trouana in Roma. Da Roma fece passaggio a Napoli ne le publiche scuole de la qual città ottenne parimente la publica lettura per quanto si raccoglie dal Proemio de la sua Summa Aritmetica. Fu huomo laboriosissimo et inimico del otio. Scrisse molte opere, e prima ad instanza per quanto mi credo de la giouentù di Perugia trasferì in lingua uolgare gli Elementi di Euclide, il che gli successe (come egli afferma in una dedicatoria à Pietro Soderini) assai felicemente. Seruissi de la traduttione del Campano non discostandosi punto dal opinione di lui. Diedesi poscia tutto a la compilatione di quella grande opera ch'egli intitolò Somma di Aritmetica Geometria Proportioni e Proportionalità, per cagione de la quale diuentò ne suoi tempi grandemente famoso. Suo fine nel comporre la detta opera, per quanto e dal Proemio e dal opera med.a si raccoglie, non fu semplicemente la speculatione ma la pratica, di maniera che le sue contemplationi ad altro non riguardauano che al uso, onde sforzandosi d'aggiungere credito a la detta sua fatica si sforza nel Proemio di mostrare ch'ella sia per esser utile a gli Astrologi, a gli Architetti, à Prospettiui, à Pittori, à Scultori, à Musici, à Cosmografi et insomma à tutte l'arti mecaniche e similmente al arte militare, a quella de traffichi, a la Grammatica, a la Dialettica, a la Relorica, a la Poesia, a la Filosofia, a la Medicina, a le leggi canoniche e ciuili e finalmente a la Teologia. Né per altra cagione che perché potesse esser letta da gli artefici idioti e non intendenti de la lingua latina fu da lui come egli stesso afferma scritta ne la sua lingua materna e uolgare. Diuise egli tutta questa grande opera in due parti principali, ne la prima de le quali tratto de le cose Aritmetiche e nel altra de le Geometriche, la prima diuise in trattati, i trattati in distintioni e le distintioni in articoli; la seconda parte uolle che fosse tutto un corpo o trattato diuidendolo solo in distintioni e le distintioni in capitoli. Altramente anco diuise la detta opera, cioè in cinque parti, quattro de le quali chiuse sotto quella prima principale, e la quinta diede a la seconda ne la quale tratta di Geometria.Ma perché a chi non ha uedulo la predetta sua fatica possa esser noto ciò che ella contenga, raccoglierò breuente *(sic)* e trasfonderò in questo luogo il sommario che ne uien fatto da lui. Ne la prima parte dunque tratta de numeri in tutti quei modi che sono appartenenti a la pratica semplice et a la specola tiua, cioè non applicata al uso, onde insegna di rileuare ouer pronuntiar la ualuta di qualsiuoglia gran numero per uia di caratteri figurato; inoltra ui insegna le quattro operationi principali, che sono il partire, il moltiplicare, il sommare et il sottrarre; mostra dopo il modo da trouar le radici, di tutte le sorti e come per uia d'Algebra, che dagli Aritmetici si chiama arte maggiore, si possa risoluere ogni caso proposto; insegna il modo del partire, multiplicare, sommare e sottrarre in materia de le proportioni; laonde in questa prima parte raccoglie e perpende tutto quello che da Euclide fu specolato e nel quinto e nel decimo libro de gli elementi. Aggiunse a questa parte tutte le pratiche Mercantili, trattouui di guadagni, perdite, uendite, uiaggi, condotte di robbe, pesi, misure e monete, caratteri di pregi, datii, Gabelle, fonticaggi, noleggi, pigioni, salarii familiari, fattoraggi, de le leghe de metalli appartenenti a le monete, de pesi, de le misure spettanti al traffico e di tutte quell'altre cose che per compita cognitione di questa materia si ricercano. Ne la seconda parte principale trattò de le compagnie mercantili e come si fondino et anco come si distribuiscano e partano i guadagni, e ciò inuestigò non solo con modi ordinarii ma seruissi anco ne le solutioni de casi de le regole del Algebra. Trattò similmente de baratti e de le spetie loro, de le spetie parimente de cambii, de Meriti a capo d'anno et altre pratiche spettanti a traffichi de le mercantie. In questa med[a] parte discusse tutto quello che s' aspetta a le leghe de le monete et al arte de gioiellieri et orefici. Trattoui *(sic)* anco de le socide d'animali, pigioni, cottimi, liuelli, godimenti di danari, fitti di case e di terreni, et tutti i casi che sogliono auenire in colali materie. Ne la terza parte con grandissima diligenza insegna il modo a' mercanti, di tenere i conti loro e l'uso de libri mercantili, come giornali, memoriali, vacchette et altri, come si notino il dare è l'hauere, come si facciano i bilanci, et insomma raccoglie tutto quello che s'aspetta al regolare e ben reggere i conti e le partite de mercatanti ne le botteghe e fondachi loro. Ne la quarta parte s'affatica nel porre insieme una tariffa di tutti i costumi, cambij, monete, pesi, misure, usanze di lettere di cambio secondo che uanno uariando di paese in paese, e come rispondano l'usanze de luoghi principali d'Italia fra loro e come anco a luoghi barbari de la Persia, de la Turchia, e de la Grecia e d'altri paesi stranieri. Ne la quinta parte come dicemmo raccolse tutto quello che s'aspetta ad una assoluta cognitione de la teorica et anco de la prattica de la Geometria, oue chiuse molti quesiti di Stereometria, di Geodesia, di Perspettiua, apparten. al misurar con la uista, a le Mecaniche et al altre arti subalternate a la Geometria. È manifesto dunque il nostro frate Luca altro non hauer hauuto auanti a gli occhi ne la compositione di questa sua opera che la prattica e principalmente la prattica Mercantile, il che afferma egli stesso nel proemio oue dice essersi mosso principalmente per l'utilità de sudditi del Duca d'Urbino impiegati a' traffichi et ad altri ingegnosi essercitii. Scrisse frate Luca ne la sua lingua materna come si disse , accioché da mercatanti et artefici l'opera sua potesse essere studiata et intesa, nondimeno poco felicemente gli successe poiché il suo dire è di maniera barbaro, irregolato, rozo et infelice, che rende nausea a quelli che leggono le cose sue , e certo che se sotto cotanta sordidezza di parole non ui fossero considerationi così belle et utili, non sarebbe quell'opera degna de la luce, laonde ueram. si può dire che chi studia l'opera sua raccolga le gemme da le immonditie, come già disse Virgilio al proposito d'Ennio. Mescola egli le frasi latine con le uolgari e stroppia e l'une e l'altre; l'idioma poi, benché per lo più sia materno Borghese, che per se stesso è brutto et odioso e mescolato di Venetiano e di tutte le lingue italiane peggiori, la cagione di ciò credo che sia da recarsi al non hauer egli giamai dato opera a le belle lettere latine e uolgari, ma sempre essere stato immerso ne le specolationi matematiche onde non è marauiglia che non s'acquistino quell'arti a le quali altri non attende. Parte de la colpa deuesi anco à quel secolo nel quale se bene la lingua latina era appresso i buoni molto affinata, la uolgare se ne stava poco meno che nascosta nel fango. L'esser egli anco stato frate può essere stato cagione di questa sua barbarie, poiché noi uediamo per lo più i claustrali come quelli che sono separati dal secolo hauer. poca gratia ne le lettere secolari. Il Commandino conoscendo la bontà di quest'opera e sentendo dispiacere di uederla immersa ne la feccia di lingua cotanto indegna, s'era risoluto d'illustrarla e di lingua e di correttione e di figure, e già haueua il tutto à buon termine, quando fu sopragiunto da la morte, che questa e molte altre fatiche fece rimanere imperfette. Era frate Luca spesse uolte in Urbino accarezzato da tutti e particolarmente da Cortigiani fra quali u'era il conte Antonio Ubaldino che degli studii Matematici grandemente si dilettaua, eraui parimente Pauolo di Middelburgo che intorno quei tempi fu fatto Vescovo di Fossombrone. Allettato dunque da le cortesie riceuuteui e da la nobiltà del animo del Duca Guidobaldo gli dedicò la sopradetta sua Summa . Fu poi il detto libro stampato in Venetia a spese di Marco Sanuto Gentilhuomo Venetiano et intendentissimo de le professioni Matematiche, assistendo sempre Frate Luca a le stampe e prouedendo a la correttione loro, né fu defraudato dal suo desiderio, poiché per quei tempi l'opera uenne fuori copiosa di molto ornamento, dico di quel ornamento che può essere recato al opere da la diligenza de stampatori. Ottenne da la Signoria priuilegio per dieci anni, che altri non la potesse stampare in Venetia, e stampata fuori ne la detta città non potesse esser uenduta. Leggesi nel principio de la detta opera un sonetto da un Giorgio Sommaripa gentilhuomo Veronese mandato da lui al autore in lode de la sua fatica, ma egli è cotanto goffo e ruuido che eccita chi lo legge a riso e perciò da noi non si registra in questo luogo. Hassi nel med.° luogo un Epigramma Latino d'un Fra Pompilio, il quale per esser assai elegante sarà inserto in questo luogo. È dunque tale

Que fuerant mediis carie consumpta latebris
Restituit Lucas lector amice tibi
Menia si lapides quot habent erecta sub auras
Aut ubi Phoebeos temperet annus eques
Et que ceruleas ducat te stella per undas
Et que decliui corpore signa cadant
Linea; quid corpus: quid circus et angulus omnis
Quae sit Apellea picta tabella manu.
Ultima que terris regio, quas fluctibus urbes
Extremus gelidis abluat Oceanus
Tempore seu certo concordem emittere uocem
Nature mores discere seu cupies
Demere seu numeros numeris siue addere tentas
Sollicitum medio seu iuuat esse foro
Hunc eme: quicquid erit liber hic conducet agenti
Quod non dant plures hic feret unus opem.

Seruissi frate Luca ne la compilalione di questa summa de la dottrina d'Euclide, di Boetio e di Tolomeo, e fra più moderni di quella di Leonardo Pisano, di Giordano, di Biagio da Parma, di Giouanni di Sacrobosco, di Prosdocimo Padouano, di G. Suissetto e d'altri scrittori aritmetici più antichi di lui. Ne la prattica poi de la Mercantia seruissi del uso commune e particolarmente di quello che ne suoi tempi fioriua in Venetia, in Fiorenza e nel altre più famose città del Italia. Da sei ouero otto anni dopo la publicazione de la sopradetta somma essendo molto famoso trasferissi a Milano et insinuossi ne la gratia dì Ludouico Sforza, che già dopo la morte di Giouanni Galeazzo suo nepote haueua preso il possesso del ducato, onde per segno di riconoscimento de le molte cortesie usategli dal detto principe gli donò un libro composto da lui intitolato de la Diuina Proportione in cui si contengono le solutioni di molti e bellissimi quesiti Matematici. Nel abbellire quest'opera pose Luca cotanta diligenza che procurò che Leonardo da Vinci pittore eccellentissimo de suoi tempi disegnasse et intagliasse le sue figure, a fine che non si hauesse da desiderare in loro l'artificio de la perspettiua di cui Leonardo era oltramodo pratico. Erano di maniera Leonardo et il nostro Luca domestici fra loro, che sempre si trouauano insieme, onde il frate suole nominarlo Leonardo suo. Per la dedicatione di quest'opera fu egli con molta liberalità e magnificenzia riconosciuto da Ludouico e ne riceuè grandissimi doni. Quest'opera non ancora data a le stampe, sopragiunti i trauagli di Ludouico, la prigionia e la morte, era in pericolo di perdersi, e forse sarebbesi perduta, quando la diligenza di Pietro Soderini - che in quel tempo era Confaloniere perpetuo de la rep. Fiorentina, non l'hauesse ricuperato (*sic*); laonde frate Luca riconoscendo il beneficio fatto a l'opera sua da la nobiltà de l'animo di quel grande huomo, uolle ne la seconda editione dedicarlo a lui, e per fare il tutto più compiutamente ui aggiunse in luogo d'appendice due altre sue operette, l'una ne la quale esattissimamente insegna le forme e le regole de gli antichi Caratteri Latini, un'altra ne la quale, com'egli scriue, si fabrica la scala a gli Architetti et a gli Scultori. Era Luca già uecchio quando compose l'opera de la Diuina proportione, ne la quale pose cotanta diligenza e rinchiuse cose così belle che lo chiamò tesoro recondito. Dedicò parimente al medesimo Pietro Soderini un trattato de corpi regulari e de dipendenti da loro, diuiso in cinque parti, nel quale diede disegnati in perspettiua i detti corpi e pieni e uoti, cosa certo di molto artifitio, et ingegnosa. La cagione poi che lo mosse a donar queste sue opere al sopra detto Soderini non fu quella solamente che si disse, del hauergli ricuperato il libro de la Diuina proportione, ma la molta dimestichezza ch'egli haueua con Pietro et con tutta la famiglia de Soderini, da quali sempre insin da giouanetto era stato amoreuolmente raccolto et accarezzato, e particolarmente dal Cardinale di Volterra fratello di Pietro Soderini. Il libro de la Diuina proportione fece egli stampare in Venetia del 1508. In lode de la qual opera aggiunseui una sua epistola un Daniele Gaetano. L'anno seguente stampò ne la med.a città l'altr'opera de corpi Regolari. Fu la uirtù del nostro Luca tenuta in molta stima da più principali huomini del suo tempo, fra quali, oltra il Duca LudouicoSforza, il Duca Guidobaldo nostro, Pietro Sederini et il suo fratello Cardinale, furono anco il Cardinale da Este Hippolito, il primo creato da Alessandro sesto, Pauolo di Middelburgo Vescouo di Fossombrone, Camillo Vitelli à cui spiegò gli Elementi d'Euclide, Antonio Ubaldini et altri. Nè ui fu pittore, scultore, o Architetto de suoi tempi, che seco non contrahesse strettissima amicitia. Fra quali ui fu Pietro de Franceschi suo compatriota pittore eccellentiss.º e perspettiuo, di mano di cui si conserua ne la Guardarobba de nostri serenissimi principi in Urbino il ritratto al naturale d'esso frate Luca col suo libro auanti de la Somma Aritmetica, et alcuni corpi regolari fínti di cristallo appesi in alto, ne quali e da le linee e da lumi e da l'ombre si scopre quanto Pietro fosse intendente ne la sua proffessione. Doue frate Luca morisse e quanto tempo uiuesse non m'è noto, ben so questo, ch'egli morì assai uecchio, il che argomento dal hauer mandato fuori la prima sua opera del 1470 e l'ultima del 1509, di maniera che se quando egli compose la prima era di uenticinque o trenta anni, come è da credere quando morì ne haueua da sessantacinque in settanta. E questo è quanto da le sue opere principalmente io ho saputo porre insieme d'appartenente a la uita di lui.

A di 8. Aprile 1589

*Riprodotto da B. BONCOMPAGNI, *Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni De Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro)* scritte da Bernardino Baldi, estratto dal "Bollettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, diretto da B. Boncompagni, a.XII (1879), pp. 421-427, Forni Editore, Bologna, 1879.

***BERNARDINO BALDI**

È nato il 5 giugno 1553 ad Urbino, dove si è affermato come umanista, poeta e storico. Poliglotta (conosceva 16 lingue!), ha compilato grammatiche e vocabolari (arabo, persiano, ungherese). Ha tradotto testi dal latino e dal greco, ha scritto biografie di uomini illustri e di matematici (cfr. *Vite di matematici italiani,* da cui è tratta la biografia di Pacioli). È stato al servizio delle principali corti dell'epoca. La sua opera letteraria comprende testi poetici (tra cui il poemetto didascalico in versi sciolti *Nautica*) e saggi (tra cui i dialoghi sul Tasso). È morto nella città natale il 10 ottobre 1617.

Enrico Giusti Carlo Maccagni*

Luca Pacioli a Borgo San Sepolcro
Un uomo del Rinascimento

La fine del Quattrocento segna un punto di svolta per la cultura europea. Circa mezzo secolo prima, Johan Gutemberg e i suoi collaboratori avevano messo a punto le tecniche di stampa a caratteri mobili, e avevano stampato i primi volumi. L'invenzione si era diffusa subito in quasi tutta l'Europa, e prima della fine del secolo, delle tipografie operavano in tutte le città principali; in particolare a Venezia, che si afferma subito come il più importante centro tipografico d'Europa.

Rispetto al codice manoscritto, il libro stampato presenta enormi vantaggi: il costo contenuto, che ne determina una diffusione incomparabilmente maggiore; l'uniformità del testo, che permette il formarsi di un sistema di riferimento comune a tutti i lettori; la nitidezza dei caratteri e la conseguente facilità di lettura. Tutti questi fattori contribuiscono a creare una comunità europea di letterati, storici, scienziati che leggono gli stessi testi e che comunicano tra loro diffondendo con la stampa le proprie opere. Ben presto, coloro che per ventura o per scelta non si avvalgono della stampa, verranno spinti ai margini del processo culturale.

I primi volumi a stampa sono usualmente Bibbie o libri di devozione, a cui seguono testi letterari e filosofici di autori antichi; verso gli ultimi anni del secolo vedono la luce anche testi scientifici, sia di autori classici (gli *Elementi di* Euclide vengono pubblicati a Venezia nel 1482) che di moderni.

Tra questi ultimi, un posto particolare merita Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro, o fra Luca di Borgo, come usava chiamarsi dopo aver vestito il saio francescano. Fra Luca è forse il primo matematico vivente ad aver diffuso i suoi libri con le stampe; certo è quello che più di ogni altro ha saputo scorgere le opportunità offerte dal nuovo mezzo, e ne ha sfruttato appieno le potenzialità. I suoi scritti, diffusi in un numero di copie mai raggiunto da nessun codice, segneranno il punto di partenza della matematica del Rinascimento.

Nell'esperienza umana e culturale di Pacioli confluiscono diversi elementi i quali possono far meglio comprendere l'interesse che la sua figura e la sua opera hanno suscitato presso i contemporanei e presso i posteri.

Da fanciullo Pacioli dovette essere educato in una scuola d'abaco, come attesta la sua scrittura, una "mercantesca" quale appunto si insegnava nelle scuole d'abaco; successivamente visse presso il mercante veneziano Rompiasi alla Giudecca: ebbe dunque conoscenza della teoria ed esperienza della pratica della mercatura, in particolare per quanto riguarda le matematiche applicate. A Venezia Pacioli frequentò inoltre la scuola di Rialto quando vi insegnava Domenico Bragadin: qui seguì l'equivalente di un corso universitario della facoltà delle arti, apprendendo il latino e le discipline liberali, con particolare attenzione per quelle scientifiche del quadrivio. Successivamente vestì l'abito dei frati minori francescani e studiò teologia fino a diventarne maestro, titolo che richiama spesso nelle sue opere.

Nel suo continuo spostarsi in Italia da una città all'altra per insegnare le matematiche nelle università e nelle scuole pubbliche o per ragioni legate alla sua attività all'interno dell'Ordine, venne in contatto con gli ambienti culturali e artistici più vivaci che vivevano all'ombra delle grandi signorie di Urbino, Firenze, Milano, Napoli e della corte romana. Da queste molteplici esperienze trasse differenti conoscenze e suggestioni legate a molteplici temi, talvolta in modo scarsamente critico e sovente poco approfondito, che compaiono puntualmente nei suoi scritti, intrecciandosi nei modi più vari: probabilmente anche dagli studi teologici in seno all'Ordine e dalla tradizione culturale dello stesso, abbastanza libera nei confronti della scolastica tomistica, gli venne una prima inclinazione per la filosofia platonica.

Ebbe rapporti con tutto il mondo degli artisti e degli architetti del tempo: i più noti sono quelli con Leonardo da Vinci alla corte sforzesca di Milano, al quale insegnò geometria e aritmetica avendone in cambio gli originali per le figure dei poliedri per la *Divina proportione*, mentre si ritiene che Albrecht Durer sia venuto in Italia proprio per incontrarlo; i meno documentati sono invece quelli con il conterraneo Piero della Francesca, dei cui scritti teorici pure si avvalse largamente.

Il suo interesse principale però rimase sempre rivolto alla matematica, anche nelle forme esoteriche e filosofiche del neoplatonismo fiorentino, ma soprattutto a quella applicata ai commerci e alle arti, come la prospettiva o la teoria delle proporzioni in architettura.

Scelse di esprimersi in volgare per poter raggiungere l'uditorio più vasto, mettendo a frutto tanto la tradizione didattica delle scuole d'abaco che l'esperienza della predicazione rivolta al popolo: e per lo stesso fine ricorse alla stampa, dimostrando di essere stato tra i primi a comprenderne pienamente la potenzialità e l'efficacia per la diffusione delle conoscenze.

Anche se fu – almeno ai nostri occhi – originale soprattutto negli accostamenti tra la scienza e ciò che la scienza non è, godette meritata fama di divulgatore; dotato di una fortissima personalità egocentrica, di grande apertura verso gli altri e di inesauribile curiosità, come insegnante doveva essere affascinante e certamente sapeva suscitare nell'uditorio grande interesse per le materie impartite, usando con consumata abilità esempi e digressioni al fine di mantenerne desta l'attenzione, come si può rilevare dai suoi scritti che in molti casi sembrano riprodurre il parlato.

I testi che rimangono, lo mostrano come un personaggio totalmente immerso nel suo tempo, di cui offre sovente testimonianze preziose: anche nel campo delle matematiche la sua opera riassume quanto l'Occidente aveva prodotto dai tempi del Fibonacci, così da costituire il migliore punto di partenza per gli sviluppi futuri.

Delle sue opere, tre giunsero alle stampe, per opera del tipografo Paganino dei Paganini: la *Summa* (1494), la *Divina Proportione* (1509) e, con la stessa data, un'edizione degli *Elementi* di Euclide, che Pacioli arricchisce di commenti. Di due altre ci restano i manoscritti: un *Trattato di aritmetica ed algebra* (1478), scritto per i suoi discepoli perugini e che prefigura già temi e contenuti della *Summa*, e un trattatello di giochi e curiosità matematiche, dal titolo *De viribus quantitatis*. Sono invece perduti due trattati simili a quello di Perugia, che Pacioli narra di aver scritto a Venezia e a Zara, come pure un secondo opuscolo di giochi, *De ludis* ovvero *Schifanoia*, e una traduzione italiana degli *Elementi*.

Pubblicata nel 1494, e poi ristampata nel 1523, la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* è molto di più che una delle prime opere matematiche a stampa. In primo luogo, essa va al di là dello stretto ambito matematico, presentandosi come un'enciclopedia di tutto il sapere abachistico, con tutti gli arricchimenti e gli aggiustamenti, sia teorici che pratici, che si erano aggiunti nel volgere dei secoli all'opera di Leonardo Pisano.

Come l'opera del Fibonacci aveva rappresentato il fondamento dell'aritmetica e dell'algebra per tutto il Medioevo, così la *Summa* di Pacioli, diffusa per mezzo della stampa in un numero di esemplari che nessun codice avrebbe potuto mai raggiungere, si pone come il nuovo punto di partenza per la matematica moderna.

In ambedue i casi, per il *Liber Abaci* come per la *Summa*, è difficile discernere la novità dalla tradizione, i contributi originali dalle parti mutuate da altri. Per comporre la *Summa*, Pacioli saccheggia le opere di cui dispone, inserendo nel suo trattato interi volumi altrui. La parte geometrica della *Summa* riporta al completo un codice anonimo della metà del Quattrocento, oggi conservato alla Biblioteca Nazionale di Firenze, nonché larghi passi del *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca. Più tardi, lo stesso Pacioli inserirà nella *Divina Proportione* la traduzione in volgare del *De quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca.

Ma non è questo il punto essenziale; meno che mai in un'epoca in cui il possesso materiale di un'opera contava probabilmente più che non la proprietà intellettuale, e nella quale il plagio era prassi corrente tra gli scrittori d'abaco. Certo, la sistematicità con cui Pacioli si avvale delle opere altrui è notevole; quello però che conta, nell'opera di Fra Luca come in quella del Pisano, non è il maggiore o minore grado di originalità del suo contenuto, ma l'aver organizzato le conoscenze in un tutto organico, e l'aver messo a disposizione degli studiosi un testo nel quale potessero trovare facilmente quanto prima era sparso e difficile da rinvenire. La *Summa* è un'opera totale, che compendia e rende obsoleti tutti gli scritti d'abaco che l'avevano preceduta; un'opera con cui si misureranno i maggiori matematici del secolo successivo, non fosse altro che per rilevarne gli errori, e da cui prenderanno le mosse per superare per la prima volta le colonne d'Ercole delle scoperte degli antichi.

Nel 1994 è ricorso il cinquecentesimo anniversario della pubblicazione della *Summa*. Le celebrazioni dell'evento, tra cui in particolare la mostra e il convegno internazionale dedicati a "Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento", sono state un'occasione per riflettere sul significato dell'opera di Pacioli e sul suo contributo all'edificazione della scienza moderna.

Commercio e Contabilità

A partire dal X secolo la prosperità di molte città costiere fu assicurata dai traffici marittimi che, in un'Europa con poche e difficili vie di comunicazione terrestri, erano gli unici a permettere la circolazione delle merci e quindi la pratica del commercio. Così in Italia fecero la propria fortuna le repubbliche marinare - Amalfi, Pisa, Genova e Venezia -, alle quali si aggiunsero rapidamente i grandi centri manifatturieri come Milano e Firenze. Quando nel Trecento raggiunsero la massima espansione, Venezia e Genova avevano rapporti con i centri mercantili del Mediterraneo occidentale e orientale, del Mar Nero, dell'Inghilterra, delle Fiandre e anche delle coste africane al di là dello stretto di Gibilterra.

Il commercio riguardava materie prime e prodotti finiti di ogni genere, merci preziose e comuni, sete e spezie, sale e prodotti alimentari, ed era affiancato da una vivace attività bancaria, cambiaria, creditizia e assicurativa, che sovente risultò più lucrosa degli stessi traffici mercantili.

Agli inizi il mercante viaggiava assieme alle sue merci che commerciava spostandosi da una piazza all'altra, ma l'espandersi e l'intensificarsi dei traffici portarono in breve ad aziende che dal centro governavano estese reti anche di decine di rappresentanti residenti nelle diverse città, mentre l'aumentare del volume dei prodotti trattati e del loro valore impose il ricorso alla costituzione di società o compagnie, non solo uni-familiari e per un singolo negozio, ma anche aperte a estranei e attive per periodi di tempo più o meno lunghi.

Il controllo di queste reti commerciali era tenuto attraverso l'adozione di una contabilità uniforme e attraverso scambi fittissimi di corrispondenza, assicurati da appositi servizi postali gestiti in proprio dalle stesse corporazioni di mercanti. Per posta erano trasmesse le istruzioni circa la conduzione degli affari, e scambiate informazioni sull'andamento dei mercati, sulle previsioni economiche, sul corso dei cambi e sulle quotazioni delle merci, sugli arrivi e le partenze delle navi. Con lo stesso mezzo circolavano vari altri documenti, come contratti, lettere di cambio, assegni. Le comunicazioni erano fittissime ed essenziali per ogni attività commerciale e bancaria: l'archivio del mercante pratese Francesco di Marco Datini, morto nel 1410, conserva 140.000 lettere, oltre a decine di migliaia di altri documenti e a diverse centinaia di registri, relative a circa mezzo secolo di attività di un azienda di medie dimensioni. L'altro pilastro su cui si reggevano le aziende commerciali era un collaudato sistema di contabilità che la pratica aveva sempre più perfezionato.

Agli inizi, infatti, le scritture contabili erano semplicemente un aiuto per la memoria, mentre con lo svilupparsi delle attività divennero un indispensabile strumento di gestione, sempre più raffinato e funzionale. Già al primi del XIII secolo il grande matematico pisano Leonardo Fibonacci, vissuto nell'ambiente dei mercanti latini, musulmani e bizantini attivi nel Mediterraneo, compose un innovativo trattato di matematica, il *Liber Abaci*, in gran parte dedicato alle applicazioni dell'aritmetica ai commerci: cambi di monete, equivalenze di pesi e misure, baratti, spartizione di utili e di perdite, calcolo di interessi; ma soprattutto introdusse nell'Occidente latino le cifre arabe, mostrandone i vantaggi nei calcoli rispetto alle romane, e convinse i mercanti dell'utilità di tenere sistematicamente per iscritto la loro contabilità: la mercatura fu così avviata a divenire l'unica professione non dotta che imponeva a chi l'esercitava la pratica assidua della scrittura. In breve tempo l'uso di registrare in modo regolare e completo i fatti dell'impresa si diffuse talmente che già nel Trecento si riconobbe ai libri contabili il valore di prove in giudizio. Contemporaneamente essi andavano assumendo funzioni e caratteri specifici: accanto alla prima registrazione per memoria, comparve il giornale con la scrittura quotidiana in successione cronologica delle operazioni, e poi il libro mastro, dove a ogni corrispondente abituale era riservato un suo conto apposito, diviso in dare e avere; si aggiunsero altri quaderni particolari relativi ai beni patrimoniali e strumentali, alle merci, ai soci. Ma l'elemento maggiormente innovativo che segnò l'evoluzione della contabilità è rappresentato dal comparire della scrittura in partita doppia: tale procedimento, descritto per la prima volta da Luca Pacioli nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (Venezia 1494), era già applicato da più di un secolo nei grandi centri commerciali, come Venezia, Genova e Firenze, dove era chiamato alla veneziana. Per la propria attività il mercante compilava anche dei repertori, le *Tariffe,* con tutte le informazioni utili alla mercatura: i cambi delle monete, le equivalenze di pesi e misure, gli usi commerciali delle varie piazze con le relative imposte doganali, i prodotti locali con i prezzi e le caratteristiche merceologiche di essi, i tempi di percorrenza delle rotte e delle vie terrestri, i costi dei trasporti e tabelle di calcoli fatti.

Il mercante era istruito in apposite scuole - le botteghe d'abaco - e completava la propria preparazione attraverso l'apprendistato, che sovente era in parte svolto presso le sedi delle aziende all'estero.

Le cifre arabe

Anche se si trovano occasionalmente su documenti precedenti, le cifre arabe - in realtà cifre indiane, trasmesse in Occidente attraverso gli arabi - fanno il loro ingresso in Europa nel 1202, con il *Liber Abaci* di Leonardo Pisano. Con esse viene introdotta la notazione posizionale, secondo la quale il valore di una cifra dipende dalla sua posizione all'interno del numero: unità per la cifra più a destra, decine per la seconda, e così via. Così il numero 1202 significa 1 migliaio, 2 centinaia, 0 decine e 2 unità. La notazione posizionale rende necessario l'uso dello zero, una cifra essenziale perché altrimenti non si potrebbe distinguere 1202 da 122, ma anche una specie di ossimoro matematico, un segno per indicare qualcosa che non c'è. I numeri romani, usati fino ad allora, non hanno nulla di simile; ogni lettera indica un numero, e alla composizione di lettere corrisponde la somma dei numeri, indipendentemente dalla loro posizione. La data 1202 si scrive in numeri romani MCCII, e le due I (o le due C) hanno lo stesso valore 1 (o 100). La comodità e l'uniformità della scrittura posizionale saltano subito agli occhi: per esempio, come ci dice lo stesso Fibonacci, tutti i numeri tra 1000 e 9999 hanno quattro cifre, mentre nella notazione romana abbiamo 1001=MI e 4321=MMMMCCCXXI.

Ma il vantaggio maggiore delle cifre arabe sta nella facilità con cui si eseguono le operazioni aritmetiche; una facilità che agli occhi di quanti erano avvezzi alla laboriosità della notazione romana doveva apparire quasi un gioco di prestigio. Non è un caso se occorrerà del tempo prima che il nuovo modo di far conto sia accettato nell'amministrazione e nel commercio; destino questo comune a tutte le innovazioni di rilievo.

Le resistenze vengono però superate dall'estrema versatilità della notazione posizionale, che rende possibili, anzi addirittura semplici, calcoli e procedimenti che richiedevano autentici virtuosismi con il precedente sistema. Basterà confrontare il volume del Fibonacci con le aritmetiche che circolavano prima del 1200, in particolare con quella celeberrima attribuita a Boezio, per rendersi conto dell'abisso che separa i due mondi: confinato l'uno all'impotenza di una teoria senza possibilità applicative, capace l'altro di dominare tutte le operazioni della vita civile che richiedessero computi e misure.

Parallelamente il termine abaco, che designava una tavoletta su cui si faceva di conto spostando i "calcoli", perde il suo significato originario per diventare sinonimo di matematica applicata alle necessità quotidiane; un significato che verrà meno solo quando lo sviluppo congiunto dell'economia e della matematica separerà in un numero di specializzazioni una materia ormai troppo ampia per poter essere ristretta nell'ambito di una sola disciplina.

La semplicità del nuovo sistema permette di eseguire operazioni piuttosto complesse, anche in situazioni in cui non si abbia a disposizione l'occorrente per scrivere. Il calcolo mentale, che si spinge fino alla moltiplicazione di numeri di tre o più cifre, richiede che si tengano a mente numeri relativamente grandi. A questo scopo si fa uso di un sistema mnemonico digitale, molto diffuso nel

Medioevo, e che troviamo illustrato nella maggior parte dei trattati d'abaco, dal *Liber abaci* di Leonardo Pisano alla *Summa* di Pacioli. Le cifre venivano memorizzate nelle due mani: nella mano sinistra venivano registrata le unità fino a 100, nella destra le centinaia. Era così possibile "tenere in mano" numeri fino a 10.000.

Le scuole d'abaco

La diffusione delle cifre arabe e dei corrispondenti metodi di calcolo avviene in gran parte attraverso istituzioni forse uniche nella storia d'Europa: le scuole d'abaco. Queste fioriscono, a partire dal tardo XIII secolo, soprattutto nei centri più attivi economicamente, dove le attività mercantili si consolidano e si espandono, dando luogo a una opulenta borghesia commerciale, che non tarderà di lì a poco a rivendicare per sé il controllo politico delle repubbliche.

I nuovi mercanti gestiscono ormai società complesse, vere e proprie multinazionali del commercio, che non possono più essere rette con metodi di contabilità casalinghi, ma che richiedono invece la conoscenza di procedimenti matematici che, sebbene teoricamente elementari, vanno notevolmente al di là del semplice far di conto. Occorre infatti che il mercante conosca i cambi delle monete e sappia destreggiarsi tra i diversi tipi di pagamento, che sappia calcolare il valore delle merci offerte in cambio delle proprie, che sia in grado di dividere equamente gli utili della società tra i vari soci, che possa valutare l'accumulazione del capitale dato o preso in prestito.

È a queste domande che fanno fronte le scuole d'abaco, che si aprono prima nei grandi centri commerciali - Firenze, Siena, Venezia - e poi via via in città e borghi minori, stimolate spesso dalle stesse amministrazioni cittadine, che non tardano a riconoscerne l'utilità per il pubblico interesse. In molti casi, come a Firenze, si tratta di scuole private; altrove l'insegnamento è pubblico, come a Bologna, dove l'aritmetica era insegnata nell'ambito dell'Università, o a Siena e a Lucca, dove il comune stipendiava maestri d'abaco come Cecco e Gilio, ambedue da Montepulciano. «Poiché nella città di Lucca molti cittadini praticano il commercio, [...] il che male si può fare senza conoscere l'aritmetica e l'abaco», dice in due risoluzioni del 1382 e 1386 il consiglio generale di Lucca, occorrerà cercare «un maestro d'aritmetica che insegni ai fanciulli, in modo che poi nei commerci risultino più sottili e più cauti».

Le scuole d'abaco, dove l'insegnamento era impartito in volgare, si svilupparono accanto a quelle a indirizzo letterario, di più antica tradizione, che avevano per scopo la preparazione dei giovani destinati all'Università, e divennero rapidamente la scuola alternativa per il ben più numeroso pubblico di coloro che si sarebbero poi dedicati alle professioni tecniche, ai mestieri, alle arti, e non solo alla mercatura come era stato in origine: in tal modo esse costituirono un potente strumento di diffusione dell'alfabetizzazione per i tre secoli dal Trecento al Cinquecento.

Nelle scuole d'abaco i fanciulli imparavano in primo luogo a far di conto, per poi familiarizzarsi con le principali operazioni commerciali.

Il numero di ragazzi che le frequentavano, e di conseguenza che acquisivano un'istruzione elementare, era notevole; basti pensare che, stando a quanto dice il Villani nelle sue *Storie Fiorentine,* nel 1338, su un totale di circa 90.000 abitanti, i fanciulli che a Firenze frequentavano le lezioni d'abaco erano da 1000 a 1200. Cinquant'anni più tardi, nel resoconto della lite tra due maestri d'abaco, Biagio e Michele dell'abaco, troviamo scritto che tra il gennaio 1385 e il settembre 1387, cioè per un periodo di circa due anni e mezzo, i due avevano ricevuto in pagamento dai loro studenti la somma di 504 fiorini. E si può valutare a circa 500 il numero di studenti nella sola scuola di Biagio e Michele, cioè circa 200 all'anno.

Dice il Villani che poco prima della metà del Trecento c'erano a Firenze sei scuole d'abaco, e almeno altrettante ce n'erano un secolo più tardi, attorno al 1440. In esse operavano maestri come Domenico d'Agostino vaiaio, Mariano di Michele dall'abaco, Lorenzo di Biagio da Campi, Calandro di Pietro Calandri, Antonio e Taddeo Mancini da Figline. Scuole famose sorgevano a Santa Trinita, dove avevano insegnato Paolo dall'abaco e più tardi Antonio Mazzinghi, e sul vicino lungarno. Si formavano inoltre vere e proprie dinastie di maestri d'abaco, come quella del Calandri, di cui conosciamo Pietro, Calandro, Piero Maria e Filippo, o quella dei Moreschi, che contava cinque insegnanti: Pietro, i suoi due figli Girolimino e Ludovico, e i figli di questi ultimi, rispettivamente Lattanzio e Pietro.

Nell'ambito delle scuole d'abaco fioriva poi la produzione di libri, che riassumevano e in molti casi ampliavano le materie trattate, e che quindi potevano essere usati per richiamare nozioni e tecniche di calcolo non sempre presenti al ricordo. Si tratta di libri ripetitivi, spesso simili quando non copiati l'uno dall'altro, anche tra maestri diversi. Né d'altra parte da essi si richiedeva originalità; al contrario, la mancata uniformità avrebbe potuto generare incomprensioni e discussioni inopportune. Dopo trecento anni dal *Liber abaci* del Fibonacci, i problemi e i metodi restano sostanzialmente gli stessi.

Lo sviluppo dell'algebra

Con il *Liber abaci* di Leonardo Fibonacci (Leonardo Pisano) entra in Europa una disciplina destinata ad assumere un ruolo di primo piano nella matematica. Chiamata così da una corruzione del termine arabo *al-jabr,* l'algebra permetteva di affrontare tutti i problemi della matematica commerciale con un metodo unico e diretto (per via retta, per dirla con Fibonacci), a prezzo però di un impianto teorico più cospicuo e difficile, e soprattutto della necessità di procedere per iscritto. Di conseguenza, nonostante la sua struttura unitaria, l'algebra nei trattati d'abaco è usualmente confinata a un ruolo secondario, mentre la maggior parte dei problemi di aritmetica pratica, riconducibili a un'equazione di primo grado, vengono trattati con una varietà di metodi appositi - regola del tre, falsa posizione, doppia falsa posizione -, che avevano il vantaggio di prestarsi meglio al calcolo mentale.

In primo luogo, la mancanza dei numeri negativi impediva di scrivere l'equazione in forma unitaria, in modo che dove noi vediamo una sola equazione:

$$\mathbf{ax2+bx+c=0}$$

in cui i coefficienti *a, b* e *c* possono essere positivi, negativi o nulli, i trattati medievali ne riportano sei, tre semplici e tre composte, e precisamente:

$$\mathbf{ax=b;\ x2=b;\ ax2=bx;\ ax2+c=bx;\ ax2=bx+c;\ ax2+bx=c}$$

ognuna delle quali richiede una trattazione separata. Inoltre, cosa molto più importante, non esisteva una notazione algebrica, come quella che abbiamo appena usata, per scrivere un'equazione e darne la soluzione; l'una e l'altra dovevano essere espresse a parole. I coefficienti *a, b*, e *c* venivano dati direttamente in numeri, e al posto di *x* e *x2* si diceva "la cosa" e "il censo"; in questo modo l'ultima equazione dava luogo al «capitolo di censi e cose uguali a numero».

In corrispondenza, la sua soluzione, che in linguaggio moderno è data dalla formula:

$$x=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}$$

si esprimeva invece, nel *Trattato d'abaco* di Piero della Francesca: «Quando i censi e le cose sono equali al numero, se vole recare ad uno censo, poi demezzare le cose e quello demezzamento montiplicare in sé e ponere sopra il numero; e la radici de la somma meno il dimezzamento de le cose, vale la cosa».

O, più diffusamente, nel linguaggio della *Summa* di Luca Pacioli:

«Quando li censi e le cose se aguagliano al numero. Prima se die redure la equatione tutta a un censo: cioè se ci sia manco de 1 censo si debia equalmente restorare e suplire. E se fosse più de 1 censo se debia sminuire e a 1 censo redure che si farà partendo tutta la equatione ne la quantità de li censi. E facto questo se demezza le cose. E la metà se multiplica in sé. E a quel producto se agiongni el numero. E la radici di quella tal summa meno el dimezamento de le cose sia la valuta de la cosa cerchata».

Nonostante queste remore, che ne condizionano l'efficacia, è proprio nell'algebra che si possono notare mutamenti e ampliamenti di orizzonte rispetto al trattato di Leonardo in cui, seguendo una tradizione araba risalente almeno al nono secolo e al trattato di al-Khwarizmi, venivano trattate le equazioni di primo e di secondo grado, le sole di cui si sapesse dare una soluzione esatta.

In primo luogo, viene ampliandosi a dismisura il numero delle equazioni prese in esame, che in qualche autore, superano abbondantemente il centinaio. In alcuni casi si ha a che fare con semplici variazioni e generalizzazioni di casi noti; in altri, come nel trattato di Paolo Gherardi, e di qui senza variazioni in molti altri autori, le soluzioni sono semplicemente errate. Altri autori infine, tra cui Piero della Francesca, si spingono fino al sesto grado, dando delle formule risolutive errate in generale, ma che conducono al risultato esatto in alcuni tipi di problemi, come quelli relativi al tasso di interesse, che peraltro erano stati risolti senza far ricorso all'algebra già nel trattato di Fibonacci.

Tutti questi tentativi, per quanto in gran parte infruttuosi, testimoniano però una costante ricerca di metodi che permettessero di uscire dal mondo chiuso delle equazioni già conosciute; e se i primi approcci non sono altro che estensioni meccaniche alle equazioni superiori di formule risolutive valide per quelle di secondo grado, più avanti si tenterà di inferire una formula risolutiva generale a partire da problemi di cui si conosceva la soluzione per altre vie. Nel caso dei problemi di interessi, in particolare, il confronto con la soluzione di Leonardo Pisano condurrà a formule troppo particolari per essere utilizzabili in altre circostanze; ma la strada intrapresa porterà all'inizio del Cinquecento alla soluzione generale, da parte di Scipione del Ferro, dell'equazione di terzo grado.

La geometria pratica

Nei trattati d'abaco, una parte cospicua era dedicata a problemi geometrici, spesso di carattere pratico come misura e divisione di terreni, determinazione di distanze e altezze di luoghi inaccessibili, calcolo di volumi dei corpi più svariati. Questi problemi illustrano una seconda attività dei maestri d'abaco, che spesso fornivano consulenze per misure catastali, per stime di materiali, per divisioni ereditarie. Accanto a essi, i libri di geometria pratica, che talvolta si trovano anche separati dai trattati d'abaco, risolvono questioni di carattere più squisitamente teorico, che per lo più ruotano attorno al teorema di Pitagora, e affrontano talvolta anche problemi più complessi, come per esempio l'inserzione di figure date (per lo più cerchi) in altre figure. A differenza del trattati classici di geometria, primo fra tutti gli *Elementi* di Euclide, l'accento qui è posto non tanto sulle costruzioni con riga e compasso, quanto invece sulle elaborazioni numeriche. In molti casi, quando non si conosce la soluzione esatta - per esempio nella determinazione della capacità di una botte -, non si esita a ricorrere a formule empiriche; il valore di ð è sistematicamente preso uguale a 3 1/7.

La stampa

Fino alla metà del Quattrocento la trasmissione e la diffusione del sapere erano assicurate dalla scrittura a mano delle opere, compiuta direttamente dagli studiosi o da scribi di professione: tale lavoro richiedeva molto tempo e comportava il rischio di numerosi errori; inoltre i manoscritti erano molto cari, per cui la cultura era limitata a un numero ristretto di persone.

Tra gli eventi che all'inizio dell'età moderna contribuirono a cambiare radicalmente il mondo, va ricordata l'invenzione della stampa a caratteri mobili, compiuta verso la metà del XV secolo e attribuita a Johan Gutemberg di Magonza. Il nuovo ritrovato, che moltiplicava anche i vantaggi economici dell'adozione della carta come materiale di supporto rispetto alla pergamena, provocò un'autentica rivoluzione nella circolazione delle idee: la rapidità di esecuzione di un gran numero di copie abbassava drasticamente il prezzo dei libri, rendendoli accessibili a un più vasto pubblico; l'accertamento della correttezza dei testi sulla composizione assicurava il medesimo uniforme livello di attendibilità per ciascun esemplare; la bontà delle illustrazioni, particolarmente importante per le opere scientifiche, era garantita in ogni copia dall'accuratezza di esecuzione delle matrici.

Il libro a stampa ebbe un enorme immediato successo, tanto che già prima del 1480 le tipografie erano presenti in quasi tutta l'Europa; la diffusione dei volumi avveniva attraverso le consuete vie commerciali insieme alle altre merci: anche per questo, tra i centri più attivi almeno fino all'inizio del Cinquecento, si colloca Venezia, primo Stato a concedere agli editori il "privilegio" di esclusiva per la stampa. Dei circa 5500 titoli stampati in Italia entro il 1500 – i cosiddetti incunaboli -, 300 furono pubblicati a Firenze, 800 a Milano, 900 a Roma e quasi 3000 a Venezia. Qui la stampa compì fondamentali progressi tecnici nell'impiego delle illustrazioni incise in legno, nonché nel disegno dei caratteri e nella scelta dei formati dei libri specialmente a opera di Aldo Manuzio; fu stampato il primo frontespizio che segnò la definitiva separazione del libro stampato dal manoscritto; furono prodotte opere di altissimo livello estetico per impaginazione, caratteri e ornamentazione, tra le quali la stessa *Divina proportione* del Pacioli.

All'incirca fino al 1500 i tipografi pubblicarono soprattutto opere della tradizione culturale sacra e profana medievale, nonché pochi minimi testi di carattere popolare per la scuola, la devozione, le attività pratiche e lo svago. Le scelte erano evidentemente determinate da realistiche decisioni economiche nei confronti delle quali avevano poco peso le motivazioni di carattere culturale: il tipografo decideva da solo, soprattutto in base alla constatazione che la quasi totalità dei potenziali acquirenti del libro a stampa - la cui ambizione al momento era solo quella di sostituire il libro manoscritto - aveva una formazione e sentiva esigenze che trovavano senz'altro riscontro in quella tradizione di sapere. Il cambiamento di indirizzo, che alla fine terrà conto del rinnovamento umanistico, si verificherà per gradi soprattutto nel Cinquecento. Tra le edizioni quattrocentesche, per quanto riguarda le scienze, sono preminenti le opere di medicina e di astrologia, i manuali divulgativi sugli stessi argomenti, i calendari, le tavole di calcoli fatti, gli erbari e i lapidari, mentre gli altri settori sono meno rappresentati; gli *Elementi* di Euclide, nella traduzione latina dall'arabo rielaborata dal Campano, sono il primo testo capitale della scienza classica a essere stampato a Venezia nel 1482.

Luca Pacioli fu tra i primi a cogliere la rivoluzionaria importanza della stampa per la diffusione delle conoscenze; inoltre, a ragione scelse proprio Venezia per la pubblicazione delle sue opere: in tal modo, in particolare alla *Summa*, che fu il primo e l'unico testo di matematica di un autore coevo a essere stampato entro il 1500, fu assicurata una diffusione senza pari.

La partita doppia

All'origine della contabilità tenuta nella forma della partita doppia stanno alcune situazioni di fatto connesse allo sviluppo dei commerci, che determinano particolari esigenze. Il passaggio dall'azienda personale alla compagnia di soci, pone chi ha la responsabilità di amministrare la società nella condizione del tutto nuova di non poter più considerare una compravendita soltanto come un fatto personale di dare e di avere verso l'altro contraente del negozio, ma piuttosto come una variazione della situazione della società nei confronti dei compagni, i capitali dei quali sono impegnati nel negozio stesso; e di ciò deve rispondere ai medesimi che hanno il diritto di sapere in ogni momento la situazione della società.

La contabilità, evolvendosi di conseguenza, rende funzionali al nuovo assetto le scritturazioni già in uso, modificandole ove occorra: la prima nota (minuta, memoriale, scartafaccio, vacchetta...), il giornale con le registrazioni quotidiane di ogni movimento in rigoroso ordine cronologico, e il mastro con il riepilogo delle partite con i vari corrispondenti. Le maggiori trasformazioni riguardano soprattutto il mastro, ormai destinato a riprodurre la situazione della compagnia dalla costituzione alla liquidazione, attraverso tutte le variazioni: in esso all'inizio sono pertanto considerati i beni patrimoniali e strumentali e il capitale della società poi via via tutte le operazioni di compravendita non più in relazione all'altro contraente del negozio, ma alle merci che, con le spese, le perdite e i profitti, divengono altrettante voci a debito o a credito, da registrarsi in due serie complete e antitetiche di dare avere, nelle quali le singole registrazioni devono reciprocamente corrispondersi. In tal modo è sempre possibile confrontare le partite di dare e avere che nel bilancio devono chiudere sempre alla pari, così da permettere sia di conoscere la situazione economica della compagnia, sia di controllare l'esattezza della contabilità.

Luca Pacioli, il quale dovette nella fanciullezza essere istruito in una scuola d'abaco, passò poi gli anni della giovinezza a Venezia presso i mercanti Rompiasi. Non è difficile supporre che a questa esperienza diretta della cultura professionale del mercante sia legata la pubblicazione della *Summa de arithmetica* (Venezia 1494), una gran parte della quale è dedicata alle applicazioni della matematica ai commerci, e comprende il trattato sulla partita doppia *De computis et scripturis*, in volgare nonostante il titolo in latino, e una *Tariffa.* Quest'ultima riproduce un testo di dubbia paternità che già circolava e che probabilmente si era andato costituendo per successive aggiunte e perfezionamenti tratti dalla pratica dei traffici in tutti i Paesi allora conosciuti. Forse anche il trattato ha avuto un'origine analoga, comunque esso è la prima opera stampata sulla partita doppia. La materia è svolta analiticamente e con grande efficacia didattica, con numerosi esempi e con molti suggerimenti e consigli per il mercante, cui si rivolge in modo immediato e diretto: «non te parà grave la cotidiana solicitudine in tue faccende, maxime in tenere la penna in carta e tutto scrivere a dì per dì quel che te occorre».

Anche i procedimenti della partita doppia e le finalità di essa sono esposti in modo convincente e chiaro, fino alla conclusione: nel quaderno grande o mastro «mai si deve mettere cosa in dare che quella ancora non si ponga in avere, e così mai si deve mettere cosa in avere che ancora quella medesima con suo ammontare non si metta in dare. E di qua nasci poi al bilancio che del libro si fa: nel suo saldo tanto convien che sia el dare quanto l'avere [...] altramente demonstrerebbe essere errore nel ditto quaderno, cioè nel modo di far suo bilancio».

La divina proportione

La proporzione che Luca Pacioli battezzò "divina", e alla quale dedicò un'opera scritta nel 1497 e poi stampata con altro materiale a Venezia nel 1509, è quella tra un segmento e la sua "sezione aurea", in passato caricata di molti significati esoterici, e oggi studiata soprattutto per i suoi effetti estetici. Geometricamente, la sezione aurea deriva dalla divisione di un segmento unitario in due parti, in modo che il quadrato della maggiore sia uguale al rettangolo avente per lati il segmento stesso e la parte minore.

Se si indica con 1 il segmento, con x la parte maggiore, e di conseguenza con 1-x la minore, si ha l'equazione $x2=1-x$ la cui soluzione positiva è

$$\frac{\mathbf{V5\text{-}1}}{\mathbf{2}}$$

un numero irrazionale, detto anche "numero d'oro".

La presenza di questo rapporto (o meglio del suo inverso

$$\frac{\mathbf{V5+1}}{\mathbf{2}}$$

che rappresenta appunto la divina proporzione) in geometria – per esempio esso esprime il rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono regolare - o nell'aritmetica l' ha reso particolarmente interessante per coloro che, ispirandosi alla tradizione dell'esoterismo pitagorico e platonico, hanno cercato nella matematica la chiave per una lettura magico-iniziatica del mondo fisico. Le proprietà matematiche della proporzione sono risultate così caricate di valenze arcane e di virtù nascoste, ben simboleggiate dai poteri degli amuleti che riproducono il pentagono magico.

Come molti altri, anche Luca Pacioli è profondamente affascinato da questi aspetti della cultura del tempo, e se ne fa portavoce mescolando tradizione pagana e cristiana, religione e matematica, filosofia e mitologia. Questo groviglio, fatto più di interessi irrazionali che di conoscenze meditate e criticamente acquisite, è bene illustrato da quanto egli adduce per giustificare l'attributo di "divina" alla proporzione di cui tratta, e che disinvoltamente pone in corrispondenza con gli attributi della divinità cristiana: essa è unica tra tutte le proporzioni possibili, è una ma costituita di tre termini, è indefinibile in quanto espressa da un numero irrazionale, è immutabile, definisce infine le relazioni proprie del pentagono, e per suo tramite del dodecaedro, che nella cosmologia platonica raffigura il cielo.

Nella *Divina Proportione,* comunque, il motivo di fondo, al di là dei discorsi legati alla sezione aurea, è la presentazione della matematica, in quanto scienza dei rapporti, come irrinunciabile fondamento del conoscere e del fare.

I poliedri

Nella *Divina Proportione* di Luca Pacioli, una parte considerevole è dedicata allo studio dei poliedri. Come è noto, si tratta di una traduzione, o forse, come qualcuno ha sostenuto, della versione originale, del *Libellus de quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca.

I cinque corpi regolari di cui parla il titolo dell'opera di Piero sono i cosiddetti "solidi platonici", poliedri le cui facce sono poligoni regolari, tutti uguali tra loro.

A differenza del poligoni regolari, che possono avere un numero qualunque di lati, i poliedri regolari sono solo cinque, e precisamente tre composti di triangoli equilateri, uno di quadrati e uno di pentagoni. Il motivo di questa limitazione nel numero dei poliedri possibili era ben noto fin dall'antichità: perché tre o più poligoni possano concorrere in un vertice, occorre che la somma dei loro angoli sia minore di 360 gradi. Ora gli angoli di un poligono regolare aumentano quando aumenta il numero dei lati, e già quelli di un esagono, ognuno di 120 gradi, sono troppo grandi per formare un vertice. Di conseguenza un poliedro regolare può essere costituito solo di triangoli, di quadrati o di pentagoni: in un suo vertice si possono incontrare tre, quattro o cinque triangoli, oppure tre quadrati o tre pentagoni; cinque sole possibilità che corrispondono ai cinque poliedri regolari.

Il numero dei poliedri si amplia se si considerano anche quelli semiregolari, le cui facce sono poligoni regolari di due specie differenti (per esempio pentagoni ed esagoni, come accade nel pallone da football). Il numero di questi solidi semiregolari è tredici, due del quali erano conosciuti già al tempo di Platone; una loro classificazione completa è dovuta ad Archimede.

Ma ancor prima di divenire oggetto di studi matematici, i poliedri (e i poligoni) hanno giocato un ruolo importante nell'immaginario primitivo, sia perché le loro forme si ritrovano talora in oggetti naturali, sia perché a essi si attribuirono significati simbolici e magici, così che li ritroviamo spesso sotto la forma di amuleti e in numerose decorazioni. Di qui essi passarono a quelle filosofie (Pitagora, Platone) che ritenevano dovesse esistere uno schema geometrico metafisico ed essenziale sotto le forme fisiche materiali del mondo concreto, come pure a quelle correnti di pensiero magico-astrologiche che ricercavano la ragione delle cose in strutture segrete e occulte, o in congiunzioni e influssi delle stelle.

Lo stesso Platone disegnò nel *Timeo* una cosmologia in cui i quattro elementi erano legati ad altrettanti poliedri: la terra al cubo, l'acqua all'icosaedro, l'aria all'ottaedro, il fuoco al tetraedro, mentre il dodecaedro è il cielo che racchiude l'universo.

La configurazione platonica ebbe influssi duraturi anche nel mondo cristiano, che la collegava all'immagine di un Dio operante secondo numero, peso e misura. Pur con differenze significative, la stessa visione geometrica soggiogò anche il grande Keplero, che nel suo *Misterium cosmographicum* (1596), e poi nell' *Armonia mundi* (1619), sviluppò un sistema eliocentrico nel quale la Terra e i cinque pianeti allora conosciuti si muovevano su sfere circoscritte e inscritte ai cinque poliedri regolari, secondo la successione: Saturno, cubo. Giove, tetraedro, Marte, dodecaedro, Terra, icosaedro, Venere, ottaedro, Mercurio, con al centro il Sole Immobile.

Anche il Pacioli fu naturalmente affascinato dai poliedri e dalle loro proprietà matematiche non meno che estetiche, e se ne occupò non solo trattandone teoricamente, ma anche costruendone materialmente due serie che egli stesso narra fossero conservate a Roma e a Firenze. Oltre ai poliedri regolari e semiregolari, nella *Divina proportione* troviamo anche solidi "stellati", ottenuti elevando una piramide su ogni faccia di un poliedro, e solidi "abscissi", che si costruiscono tagliando via con piani i vertici dei poliedri.

Dal tardo Medioevo a tutto il Rinascimento, lo studio dei poliedri trova nuovo vigore, anche perché, con le loro forme semplici ma non elementari, essi costituiscono un solido banco di prova per la prospettiva. Con disegni di poliedri si cimentano pittori come Paolo Uccello, e probabilmente anche Piero della Francesca e Leonardo, cui sono attribuiti gli originali delle illustrazioni che ornano i due codici superstiti della *Divina Proportione.*

Il saggio è stato edito nell'aprile del 1994 dall'Editore Giunti come Speciale Mostre in occasione del Cinquecentenario della prima stampa della *Summa* (Venezia, 1494).

Si ringraziano gli Autori e l'Editore per averci concesso la ripubblicazione del prezioso contributo.

*** ENRICO GIUSTI**

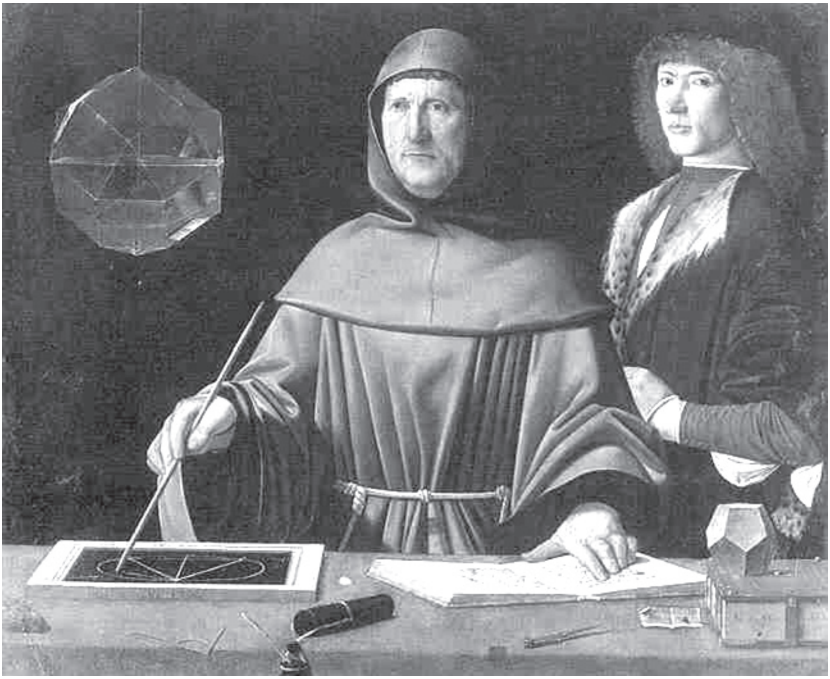
Enrico Giusti, nato nel 1940, ha svolto attività didattica e di ricerca all'Università della California a Berkeley, alla Stanford University e all'Australian National University di Camberra. Dal 1980 al 2001 ha insegnato Analisi Matematica all'Università di Firenze, dove attualmente è docente di Storia delle Matematiche. I suoi interessi scientifici, evidenziatisi anche dalla pubblicazione di numerosi articoli specifici, comprendono il calcolo delle variazioni e le superfici minime, la storia della matematica nei secoli XVI e XVII, con riferimenti alla Filosofia della Matematica. È membro della Società Italiana di Storia della Scienza e della Commissione scientifica dell'U.M.I. Si occupa soprattutto di promuovere e gestire il Giardino di Archimede, di cui è Presidente: il primo Museo in assoluto completamente dedicato alla Matematica e alle sue applicazioni.
Si riportano i titoli di alcune sue pubblicazioni: *Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles,* Cremonese, Roma, 1980; *Analisi matematica 1 e 2* (con relativi *Esercizi*), Bollati Boringhieri, Torino, 1988 (1^ ed.) e 1998 (2^ ed.); *Introduzione* a G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* Einaudi, Torino, 1990; *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana,* Bollati Boringhieri, Torino, 1993; *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici,* ibidem, 1999 (vol. tradotto in giapponese e in francese); *La matematica in cucina,* ibidem, 2004.

*** CARLO MACCAGNI**

Carlo Maccagni, è nato a Viguzzolo (AL) il 1 Agosto 1932. Ha studiato al Liceo Classico "Carlo Varese" di Tortona e si è laureato in Filosofia presso l'Università di Torino. Già Segretario della Commissione Nazionale per le Manifestazioni celebrative del 4° centenario della nascita di Galileo Galilei (1964), ha organizzato le relative celebrazioni in Italia e all'estero. Ha promosso iniziative di convegni scientifici e mostre su argomenti di storia della scienza e della tecnica. È stato ed è membro di numerose e qualificate associazioni e istituzioni scientifiche italiane e internazionali.È stato Visiting Professor di università prestigiose. Dal 1974 è Advisor editor della rivista "History of science" (Cambridge). È dal 1977 socio dell' "Académie internationale d'histoire des sciences". Numerosi e apprezzati i suoi contributi alla conoscenza di aspetti, autori e momenti di cultura scientifica. È Professore di Storia della scienza e della tecnica nell'Università di Genova. È autore di circa 150 pubblicazioni dedicate prevalentemente ad argomenti e questioni di storia delle scienze e delle tecniche in Italia.

BIBLIOGRAFIA

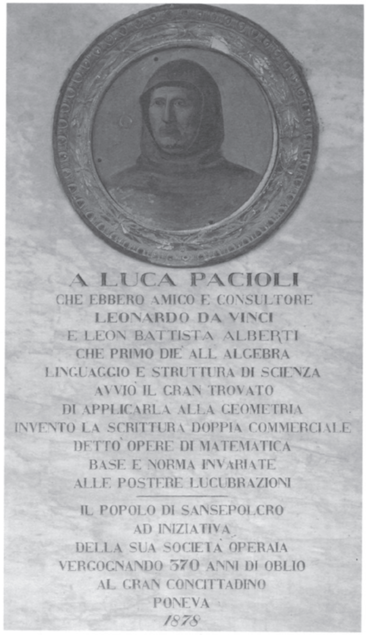
*a cura di Francesca Buttazzo**



Jacopo de' Barbari, *Luca Pacioli.* Museo Naz. di Capodimonte, Napoli

In quello che potrebbe essere il più bel ritratto in assoluto di un matematico Jacopo de' Barbari (1440-1515) ha raffigurato Luca Pacioli mentre tiene una lezione di geometria a un ignoto allievo, in cui alcuni hanno ravvisato il duca Guidobaldo (ndr. di Montefeltro). Uno dei poliedri platonici - un dodecaedro – è visibile a destra, sopra un volume della *Summa* del Pacioli. Il frate stesso, nel saio dei frati minori e vagamente simile a un poliedro nella sua altera, pensosa compostezza, sta copiando un diagramma dal Libro XIII degli *Elementi* di Euclide. Un solido trasparente chiamato «rombododecaedro» (uno dei «solidi di Archimede», con ventisei facce, diciotto a forma di quadrato e otto a forma di triangolo equilatero), pieno d'acqua per metà e sospeso a mezz'aria, simboleggia la cristallina eternità della matematica."

(da MARIO LIVIO, *La sezione aurea,* Rizzoli, 2003)



Lapide per Luca Pacioli (Palazzo delle Laudi, Sansepolcro)

1494. PACIOLI, Luca - *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni et proporzionalità*, Venezia. (1523, 1914, 1970, 1992)
(In questo testo Pacioli mira a coordinare e completare le opere e il materiale precedente, da Euclide a Boezio, a Fibonacci, a Piero della Francesca e altri. L' importanza di quest'opera consiste nella quantità di nozioni pratiche e teoriche messe insieme, così da costituire per i posteri un ottimo punto di partenza, grazie anche alla rapida diffusione dovuta alla stampa. La *Summa* è divisa in due parti: la prima dedicata all'algebra e all'aritmetica, la seconda alla geometria.)

1509. EUCLIDE - *Gli Elementi* , a cura di Luca Pacioli, Venezia.
(La versione di Pacioli si basa su una traduzione dall'arabo, condotta da Adelardo di Bath, e, successivamente, ripresa e arricchita di commenti da Giovanni Campano; il Pacioli, a sua volta, integra l'opera con nuovi commenti, variazioni e annotazioni.)

1509. PACIOLI, Luca - *De Divina Proportione*, Venezia. (1956, 1982)
(La «divina proporzione» consiste nella celebre sezione aurea della matematica antica applicata alla teoria dell'arte figurativa. L'opera è suddivisa in due parti: la prima contiene il *Compendio de la divina proporzione* ed il *Tractato del'Architectura*, all'interno del quale il Pacioli illustra un originale metodo per delineare l'alfabeto maiuscolo, con la descrizione per costruirlo mediante rette e cerchi, senza l'apporto della sezione aurea. La seconda, il *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium*, illustra la dottrina dei cinque corpi regolari e della costruzione proporzionale del corpo umano. Alla realizzazione del *De Divina Proportione* collabora anche Leonardo da Vinci disegnandone le tavole.)

1550. VASARI, Giorgio - *Le Vite*, Firenze, Tormentino. (1568, 1647, 1759, 1761, 1771, 1807, 1832, 1848, 1878, 1917, 1927, 1948, 1962, 1963)
(Il Vasari nelle sue *Vite* mette in crisi la fama di Luca Pacioli, in quanto lo accusa di aver pubblicato a suo nome i trattati matematici, che, invece, secondo lui, aveva copiato dal suo conterraneo, Piero della Francesca.)

1589. BALDI , Bernardino - *Vite de' matematici*, Boncompagni.
(La figura di Pacioli matematico nel periodo rinascimentale è riabilitata da Bernardino Baldi, che, considerato l'iniziatore della biografia scientifica del XVI secolo, nella sua opera dedica un ampio spazio alla vita del frate di Sansepolcro e ai suoi scritti, in particolare alla Summa.)

Nel corso del XIX secolo ci sono studiosi come il Gaye, che seguono l'ipotesi del Vasari ed altri, come Pungileoni e Cossali, che convalidano la tesi del Baldi e, pur non offrendo particolari novità dal punto di vista scientifico, aprono la strada all'analisi accurata e precisa di Baldassarre Boncompagni, che ci ha permesso di ottenere dati biografici e bibliografici più dettagliati e precisi.

1835. PUNGILEONI, Luigi - *Commentario sopra la vita e le opere di fra Luca Pacciolo conosciuto ancora sotto il nome di Luca dal Borgo, steso ad eccitamento del sig. Giuseppe Vallardi di Milano*, in «Giornale Arcadico di Scienza, Lettere ed Arti », Tomo LXII, gennaio febbraio 1834-35, pp. 214-33; *Memorie della vita di Fr. Luca Paccioli* (continuazione), in «Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti », Tomo LXIV, luglio-agosto-settembre 1834-35, pp. 186-203.

1836. GAYE, Johann - *Commentario sopra la vita e le opere di Fra Luca Pacciolo*, ecc., recensione al primo articolo di L. Pungileoni, in « Stuttgart Kunstblatt », XVII, pp. 285-7.

1852. BARCIULLI, Francesco - *Memorie intorno a Fra Luca Pacioli e Pietro della Francesca recitate nell'Accademia della Valle Tiberina Toscana di Borgo San Sepolcro negli anni 1830 e 1831*, Estratto dal « Giornale Arcadico », Tomo CXXVI, Roma 1852.

1856. HARZEN, Ernst - *Über den Maler Pietro degli Franceschi und seinen vermeintlichen Plagiarius, den Franziskanermönch Luca Pacioli*, in « Archiv für Zeichnende Künste », Lipsia, II, pp. 231-44.

1878. COSSALI, Pietro - *Elogio di Fra Luca Pacioli*, Roma.

1879. BONCOMPAGNI, Baldassarre - *Intorno alle vite inedite di tre matematici (Giovanni Danck di Sassonia, Giovanni de Lineriis e Fra Luca Pacioli da Borgo San Sepolcro) scritte da Bernardino Baldi*, in «Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche», a. XII, pp. 352-438.

1896. UZIELLI, Gustavo - *Ricerche intorno a Leonardo da Vinci*, Torino.
(Anche dall'Uzielli ricaviamo notizie biografiche su Luca Pacioli, in particolare sui rapporti di collaborazione con Leonardo: Leonardo disegna le tavole dei poliedri per il trattato del *De Divina Proportione*, Pacioli offre a Leonardo la sua competenza nel campo delle scienze matematiche.)

1914 . MARINI FRANCESCHI, Evelyn - *Alcune curiose notizie su Fra Luca Pacioli*, in «L'Arte », XVI, pp. 224-6.
(Nel testo sono presenti documenti relativi a questioni religiose con i francescani del Borgo, dove risiedeva, nel 1509 e 1511. L'autrice suppone che, forse, il Pacioli facesse pesare il suo ingegno e la sua cultura sugli altri religiosi, meno colti e preparati di lui, e si avvalesse ampiamente dell'autorità e libertà concessagli dal privilegio della Bolla papale.)

1916. MANCINI, Girolamo - *L'opera «De corporibus regularibus» di Pietro Franceschi detto della Francesca usurpata da fra Luca Pacioli*, Roma, Tip. della R. Accademia dei Lincei.
(All'inizio del XX secolo G. Mancini convalida le accuse del Vasari a L. Pacioli, dimostrando che Pacioli ha inserito nel *De Divina Proportione* la traduzione in volgare del *De quinque corporibus regolaribus* di Piero della Francesca. Ha così inizio un'indagine ancor più accurata volta a far luce sull'originalità o meno degli scritti dello stesso Pacioli.)

1923. BORTOLOTTI, Ettore - *Manoscritti matematici, riguardanti la storia dell'algebra esistenti nelle biblioteche di Bologna*, Bologna.

1927. VETUSTUS - *I veri e i supposti plagi di Luca Pacioli*, Rivista Italiana di Ragioneria, Roma.

1940. RICCI, Ivano - *Fra Luca Pacioli l'uomo e lo scienziato*, Sansepolcro.
(Don Ivano Ricci studia Pacioli dal punto di vista umano e scientifico, servendosi di numerose fonti a favore e a sfavore del plagio, concludendo che fra Luca dichiara apertamente le fonti da cui attinge e, possiede pienamente quella scienza matematica che era chiamato a insegnare nelle famose Università Italiane per cui si può affermare che dette nuova vita alle scienze matematiche, utilizzando i risultati e le esperienze del passato, potenziandole e diffondendole sia in Italia che in Europa.)

1947. BORTOLOTTI, Ettore - *La storia della matematica nella università di Bologna*, Bologna.

1970. ARRIGHI, Gino - *Trattato d'abaco*, Pisa.
(Gino Arrighi si inserisce nelle tesi del plagio, dimostrando, con dovizia di particolari, che il *Trattato d'Abaco* di Piero della Francesca è stato riportato nella *Summa* del Pacioli.)

1974. MARINONI, Augusto - *Leonardo, Luca Pacioli e il «De ludo geometrico»*, in Atti e Memorie dell'Accademia Petrarca di Lettere, Arti e Scienze, n.s., vol. 40, anni 1970-72, Arezzo.
(Augusto Marinoni, forse il più grande conoscitore del nostro secolo del genio, ma anche dell'umanità e del pensiero, di Leonardo osserva che "non si possono capire gli studi di Leonardo senza conoscere adeguatamente Luca Pacioli".)

1977. DALY DAVIS, Margaret - *Piero della Francesca's Mathematical Treatises*, Ravenna.
(La Daly Davis fa un'analisi comparata e molto accurata fra i trattati conosciuti di Piero della Francesca e le opere di Luca Pacioli, confermando le conclusioni, riguardanti il plagio, del Mancini e dell'Arrighi.)

1994. CAVAZZONI, Gianfranco - *Quel ragazzo figlio di Bartolomeo, allenato nella bottega di Piero della Francesca*, in «l'università», mensile dell'ateneo di Perugia, anno XII, n. 5, maggio.

(Il professor Gianfranco Cavazzoni sostiene che i rapporti esistenti tra Piero e Luca erano non quelli di un discepolo rispetto al maestro, ma erano basati sulla collaborazione e la stima reciproca.)

1994. GIUSTI, Enrico e MACCAGNI, Carlo - *Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento*, Firenze.
(Nel testo si osserva che sia nel *Liber Abaci* che nella *Summa* è difficile distinguere i contenuti originali da quelli saccheggiati da altri. Questo è, comunque, secondario, in quanto prassi comune tra gli scrittori d'abaco: il pregio è nell'aver organizzato in modo funzionale le conoscenze e aver riunito in un testo quello che, prima, era sparso e difficile da rinvenire.)

1997. PACIOLI, Luca - *De viribus quantitatis*, Milano.
(II *De viribus quantitatis* consiste in un'ampia raccolta di problemi a carattere ricreativo: giochi matematici, enigmi e massime di sapienza popolare, compilata dal Pacioli intorno al 1496.)

1998. GIUSTI, Enrico - *Luca Pacioli e la Matematica del Rinascimento*, Atti del Convegno Internazionale di Studi, Sansepolcro 13-16 aprile 1994, a cura di Enrico Giusti, Città di Castello.

La bibliografia ha inteso privilegiare i testi relativi ai rapporti di Luca Pacioli con Piero della Francesca e con Leonardo da Vinci.

Angiolo Tricca, *Piero della Francesca spiega un problema a fra Luca Pacioli* (primi anni 80 dell'800). (Ufficio del Sindaco, Palazzo delle Laudi, Sansepolcro)

Silvio Zanchi, *Ritratto di Luca Pacioli* (1927) (Ragioneria Generale dello Stato, Roma)

* È nata a Città di Castello il 26 aprile 1978. Allieva del Liceo scientifico “Piero della Francesca” di Sansepolcro negli anni 1992-1997, ha studiato presso la Facoltà di Scienze matematiche, fisiche e naturali dell’Università di Firenze, dove si è laureata in Matematica il 16 luglio 2004 con una tesi di tipo didattico-sperimentale discussa con il Prof. Graziano Gentili, docente di Istituzioni di Geometria Superiore. Dal 2004 frequenta la SSIS – Indirizzo fisico-informatico-matematico nella sede di Firenze ed è tirocinante presso il Liceo “Città di Piero”. Nell’a.s. 2004/2005 ha insegnato Matematica e Fisica nel Liceo linguistico “G. Toniolo” di Siena. Fa parte del Consiglio Direttivo del Centro Studi “Mario Pancrazi”.

Postfazione

*di Roberto Manescalchi**

Sono andato via da Sansepolcro trentadue anni fa. Praticamente senza ritorno, ho continuato, tuttavia, ad essere profondamente legato alla mia terra. Mi capita spesso, per motivi di lavoro, di incontrare l'opera dei numerosissimi suoi figli. Non ho conosciuto personalmente Mario Pancrazi professore all' Istituto Tecnico Commerciale del "borgo". Poco più anziano di me Pancrazi era di ritorno al paese, dall'Università, proprio quando io me ne ero appena andato per iniziare il mio corso di studi.

Devo confessare che quando Matteo Martelli, preside del Liceo "Città di Piero", mi ha chiesto la postfazione per un volume - il quaderno n°15 della serie dei quaderni della Valtiberina - pensato in memoria di Pancrazi, nel decimo anniversario della morte, pur dando l'immediata e doverosa disponbilità, ho provato un senso di profondo disagio. Il disagio che si prova per l'impegno di trovare parole e frasi che non ci sono abituali. Il disagio che si prova quando si avverte la sensazione di non essere completamente adeguati al compito richiesto e, probabilmente, anche il fastidio per una proposta che avevo immaginato non completamente in linea con il mio modo di ricordare, di valutare e scrivere. Per essere più espliciti non mi creava disagio e fastidio in sé il dovermi occupare di una particolarissima microstoria, mi creava fastidio il pensiero di immaginarla e pensarla permeata di scarso respiro e dal sapore assolutamente provinciale. Oggi sono felicissimo di poter constatare che così non è affatto.

Dalle "Notizie sulla vita di Mario Pancrazi" di Giuliana Maggini e Marinella Acquisti traspare con assoluta evidenza la bellissima traccia che Pancrazi ha lasciato di sé. Colui che è capace di suscitare simili ricordi non ha trascorso invano la sua parentesi terrena e credo di aver compreso che dalla sua memoria, personalissimo viatico, i suoi innumerevoli allievi, difficilmente potranno prescindere.

A parte questo brevissimo rilievo non voglio però continuare la stesura del mio testo, come consuetudine, entrando nel merito dei vari saggi e commentandoli con le solite parole, perfettamente inutili, di squisita convenienza.

I saggi e le "ristampe" sono puntuali gli uni e necessarie le altre. Ogni tassello di conoscenza contribuisce alla miglior comprensione ed io voglio, piuttosto che commentare, portare un personalissimo contributo in onore di Pancrazi.

Ho detto che non ho avuto modo di conoscerlo, ma mi sono soffermato con attenzione e piacere sul suo studio -**Luca Pacioli, la *"summa"* e la matematica del '400**- edito in proprio, per i tipi delle Arti Grafiche di Sansepolcro, nel 1992 e qui riproposto.

"Queste pagine vogliono essere un modesto contributo per far conoscere Luca Pacioli in un momento in cui Sansepolcro sta onorando l'altro illustre cittadino Piero della Francesca nel cinquecentenario della sua morte." Così Pancrazi cominciava il suo saggio e fui immediatamente sorpreso dalla profondissima umanità dell'autore. Il Pancrazi che si occupava di Pacioli per formazione e per affinità elettive sentiva, pressante, la necessità di presentare il suo lavoro nel momento in cui l'attenzione dei suoi concittadini era rivolta prevalentemente altrove.

A questa profonda umanità ho voglia di dedicare il breve saggio che segue.

Si tratta di un vecchio scritto, ma, per l'occasione, arricchito di spunti preziosi. Spunti, in questo contesto, non sono perfettamente riferiti e documentati per il semplice motivo che sono oggetto di ricerche tuttora in corso. Si tratta di un saggio sull'opera teorica di Piero, ma è proprio attraverso l'opera di Piero che è possibile la comprensione del lavoro di frate Luca…. quel lavoro verso cui Pancrazi ha dimostrato tutto il suo interesse e la sua competenza. E' il mio modo di partecipare e credo che al prof. Pancrazi la discussione in proposito avrebbe fatto sicuramente piacere.

Sprazzi di luce diversa e trasgressiva sui concetti classici di geometria e spazio sul finire del XV secolo.

Sansepolcro ha avuto un unico grandissimo figlio e certamente non si tratta di Luca Pacioli che è invece nel novero dei tantissimi. Pacioli era un buon matematico ed ebbe la fortuna di avere nella disponibilità gli scritti di Piero che saccheggiò abbondantemente. Inutile sostenere che era un periodo in cui il problema di un eventuale plagio era visto e valutato in un'ottica e con un'etica diversa da quella corrente. Inutile sostenere la tesi della *"summa"* come giusta raccolta del sapere. Pacioli saccheggia abbondantemente gli scritti che la critica riconosce a Piero e si appropria di altri che a Piero sono ancora da ascrivere. Lo fa spesso impunemente e, a volte, senza avere la piena e totale comprensione di cosa stia facendo. Nel suo lavoro che oggi potremmo quasi definire di *"copia e incolla"*, commette spesso degli errori che non si riscontrano in Piero. In merito al *De perspectiva pingendi* è lo stesso Pacioli che nel *De Divina Proportione* ci dice: *"… e anco prometto di darvi piena notitia de prospectiva mediante li documenti del nostro conterraneo e contemporale, di tal facultà a li tempi nostri Monarcha Maestro Petro de Franceschi, de la qual già feci degnissimo compendio"* Per quanto concerne l'uso dei testi pierfrancescani dell'*Abaco* e del *Libellus de quinque corporibus regularibus* da parte del frate, esso è confermato dai curatori delle rispettive ed uniche trascrizioni pubblicate, Gino Arrighi e Girolamo Mancini, nonché da un approfondito studio di comparazione effettuato da Margaret Davies negli anni ottanta. Personalmente segnaliamo che può tranquillamente essere ascritto a Piero il trattato dell'architettura contenuto nel *De Divina Proportione* da c. 23 a c.35.

Piero è certamente architetto di rango mentre nessuna esperienza in tale tipo di attività risulta accreditabile al Pacioli anche senza altri particolarissimi rilievi e senza fare ulteriori considerazioni che richiederebbero chiavi di lettura assolutamente sofisticate ed ora non proponibili. Pacioli spiega la matematica e la prospettiva a Leonardo da Vinci, la più grande mente grafica di tutti i tempi. Leonardo ci ha lasciato una sterminata quantità di grafica di altissima levatura tanta quanta neppure una decina di altri artefici suoi contemporanei sarebbero stati in grado di mettere assieme. Si giudica, inoltre, che circa cinquemila dei suoi fogli possano essere andati dispersi. Un buon matematico e la più grande mente grafica di tutti i tempi neppure assieme riescono a comprendere appieno la lezione di Piero.

Il tredici ottobre del 1506, nell'ultima sua lettera da Venezia all'amico Pirckheimer, Albrecht Durer scrive: *"…dopo di ciò andrò a Bologna, per amore dell'arte, dove mi si insegneranno i segreti della prospettiva. Poi partirò di là fra otto o dieci giorni e ritornerò a Venezia"*. Oggi, sulla scorta di analisi troppo lunghe per questo contesto, sono orientato a credere che, in Bologna, quello che già era il maggior teorico della prospettiva, a nord delle Alpi, non potesse avere altro appuntamento se non con gli scritti di Piero e con gli unici due personaggi che, assieme, potevano tentarne la spiegazione al giovane tedesco: Luca Pacioli e Leonardo.

Pacioli ha, tuttavia, indipendentemente dall'aver fatto propri gli scritti di Piero, il merito enorme di essere stato il maggior divulgatore della cultura matematica del suo tempo e anche se non ha compreso appieno la lezione pierfrancescana ha l'indubbio merito di averla messa a disposizione dei più grandi suoi contemporanei.

Dal diario di Boltraffio, allievo di Leonardo, conosciamo le prime pagine di un trattato sulla luce che il medesimo sostiene aver avuto in prestito direttamente dalle mani del maestro. Si tratta di un testo perfettamente identico a quello di un manoscritto databile intorno alla metà del XV sec. sulla natura della luce e dei colori illustrato con disegni che ho potuto visionare a lungo e giudicare, senza dubbio alcuno, assolutamente autografi di Piero (una volta il grande critico d'arte Mario Salmi ebbe a dirmi: "se non si riconosce Piero conviene di cambiare mestiere").

Il manoscritto illustrato da Piero, un preziosissimo trattato di ottica, è in un importante fondo pubblico e proviene probabilmente da Urbino. La copia che Boltraffio descrive e copia parzialmente, sul suo diario, è probabilmente uno dei tanti libri scritti da Piero, di cui parla il Vasari, e che alla morte del maestro erano nella sua casa del "Borgo". Il libro può essere arrivato nella disponibilità di Leonardo prima e Boltraffio poi, solo attraverso Pacioli. Nella fattispecie si tratta di un testo pierfrancescano inedito e sconosciuto che va ad aggiungersi ai tre già noti di cui abbiamo detto ed al trattato di architettura che, sempre a Piero, abbiamo superiormente ascritto. Opera di divulgazione dei lavori pierfrancescani, limitatamente alla materia del *De perspectiva*, fu fatta anche da Daniele Barbaro patriarca di Aquileia e dotto commentatore di Vitruvio, nonché da Ignazio Danti nei commentari alle regole del Vignola. Molto più tardi Guglielmo Libri nella sua *Histoire*… pubblica un lungo estratto dell'*Abaco* (era proprietario dell'autografo pierfrancescano) identificandolo come opera toscana del '300, ed un lucido sunto del *De perspectiva.* Circa il riflettersi degli studi scientifici del Nostro sulla sua produzione artistica a parte il carattere di assoluta evidenza proponiano l'asserzione del medesimo: *"…la pictura non è se non dimostrationi de superficie et de corpi degradati o accresciuti nel termine"*.

Prima dell'esame scientifico del contributo pierfrancescano occorre però una brevissima premessa. La rinascita delle scienze matematiche in Italia (è già stato detto nel contesto di questo volume e mi scuso per la ripetizione) inizia con le opere *Liber abbaci* del 1202 e *Pratica geometrie* del 1220 di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. Il Fibonacci recupera il sapere di Euclide ma in un rapporto tra conoscenza e vita profondamente cambiato; il discepolo dalla domanda eretica, ansioso di sapere a cosa serve la geometria per trarne profitto pratico, non avrà più ragione di essere cacciato. La pratica nella luce della teoria sarà *forma mentis* precipua e caratterizzante di tutta l'opera di Leonardo da Vinci finché, muovendo dal polacco Nicola Copernico e dall'inglese Francesco Bacone, con Galileo Galilei si arriverà alla enunciazione universale, chiara e cosciente del principio che schiuderà alla fisica le vie della matematica.

In questo filone si inserisce, nella seconda metà del Quattrocento, l'opera teorica di Piero della Francesca. Ignoriamo, in gran parte, quali fossero i precettori e a quale scuola il nostro si fosse formato e l'unico dato certo che abbiamo sui primi anni di vita di Piero è riferito esclusivamente alla sua vita artistica (citazione in un pagamento a Domenico Veneziano). Nei manoscritti di Piero troviamo citati, oltre ad Euclide, Archimede e Tolomeo e possiamo ragionevolmente supporre che abbia avuto qualche contatto con Giovanni Antonio Campano, di cui certamente conosceva la traduzione latina di Euclide che Federico II da Montefeltro conservava nella sua biblioteca. Nell' *Abaco* e nel *De quinque corporibus*…Piero propone alcune estrapolazioni delle regole risolutive delle equazioni di secondo grado e ne risolve anche di grado superiore sebbene particolari. Nel *De perspectiva* introduce esplicitamente, per primo, il concetto di "punto di distanza" attribuito poi a Baldassarre Peruzzi; anticipa il metodo di Girard Desargues ed è vicinissimo al sistema di coordinate di Pierre de Fermat e René Descartes; propone il procedimento che, tre secoli dopo, verrà codificato da Gaspard Monge e Jean-Victor Poncelet; infine non teorizza, ma di fatto introduce, il concetto della generazione di curve come inviluppi di una retta mobile che si fa comunemente risalire a Christian Huyghens prima e a Ehrenfried Walter von Tschirnhausen poi. Dal punto di vista meramente speculativo, con Piero viene senz'altro superato il dualismo platonico posto nel *De repubblica*: verità della matematica – falsità della rappresentazione pittorica. Con il Nostro, partendo dall'opera rappresentata e fruendo della conoscenza delle regole della trasformazione prospettica possiamo comunque venire a conoscenza di tutte le proprietà dell'oggetto rappresentato. L'idea di descrivere un oggetto a partire dai vari modi in cui possiamo vederlo, attraverso le diverse rappresentazioni che ne diamo e cioè di considerare le leggi di rappresentazione prima dell'oggetto stesso, è certamente l'idea più originale e moderna del XV sec. È una delle scoperte più importanti di tutti i tempi ed oggi ci fa immediatamente percepire come sia possibile, cambiando il sistema geometrico, cambiare modo di vedere.

L'ordine di idee insito nell'ultima affermazione era comunque troppo moderno, non solo per Luca Pacioli o Leonardo, ma forse per lo stesso Piero che comunque, nelle astrazioni che colpiscono i geni, anche se non si è incamminato nella strada delle geometrie non euclidee (l'ipotesi di altre costruzioni geometriche verrà posta da Carl Friedrich Gauss, nel tentare di risolvere il problema delle parallele e sviluppata appieno da Nikolai Ivanovich Lobacevskij e Janos Bolyai), aveva, senza ombra di dubbio già superato, sul finire del quattrocento, i concetti di geometria e spazio quali, come *anschauung* a priori ed apodittici, verranno postulati da Immanuel Kant nella *Critica della ragion pura* in pieno XVIII secolo.

* È nato nel 1954 a Sansepolcro, dove ha frequentato il Liceo scientifico "Piero della Francesca". Nel 1973 è stato collaboratore di Eugenio Battisti in una grande progetto di ricerca di storia dell'architettura, interessandosi soprattutto degli studi di architettura e di prospettiva di Piero della Francesca. Nel 1980 ha pubblicato un saggio (*Appunti concernenti la fortuna storica del polittico di S. Maria della Misericordia di Piero*), incluso nella *Bibliografia* ufficiale su Piero edita dall'Università della Pensylvania. Ha studiato a lungo gli scritti teorici di Piero. Nel 2005 ha scoperto la "bottega" di Leonardo in locali attigui alla Santissima Annunziata a Firenze (cfr. A. DEL MEGLIO-R. MANESCALCHI, *Tracce d'antichità del convento della SS. Annunziata nei locali dell'Istituto Geografico Militare,* I.G.M., Firenze, 2005). Collabora come consulente scientifico alla realizzazione di una fiction televisiva su Piero promossa dal Liceo "Città di Piero". È direttore del "Grafica European Center of Fine Arts". Ha fondato il "Centro Studi e Documenti d'Architettura e Storia".

PUBBLICAZIONI DEL LICEO “CITTÀ DI PIERO”

SERIE QUADERNI DELLA VALTIBERINA TOSCANA

Q. n. 1 *Multimedialità e didattica*. Atti del Seminario svoltosi a Sansepolcro l’8 maggio 1998, L’Artistica , Lama, 1999
Q. n. 2 *Ogniuomo*. Traduzione e adattamento teatrale (24 marzo 1999) di Luisanna Alvisi: dall’opera *Everyman* di Anonimo inglese della fine del XV secolo, L’Artistica, Lama, 2000
Q. n. 3 *Scuola e territorio*. Atti del Convegno svoltosi a Sansepolcro il 6 e il 7 aprile 2000, L’Artistica, Lama, 2001
Q. n. 4 *Amintore Fanfani e l’età del Centro-sinistra*. Atti del Convegno svoltosi a Sansepolcro il 20 e 21 gennaio 2000, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 2001
Q. n. 5 *Scuola, mercato e nuove tecnologie*. Atti del Convegno svoltosi a Sansepolcro, il 4 e 5 aprile 2001, L’Artistica, Lama, 2002
Q. n. 6 *Arriva l’Euro*. Atti del Seminario svoltosi a Sansepolcro il 6 dicembre 2001, L’Artistica, Lama, 2002
Q. n. 7 Project Comenius, *Building together a Europe of peace and democracy,* Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 2003
Q. n. 8 Giorgio Alberti, *Francesco, Giotto, Dante e le origini del genio italico,* Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 2003
Q. n. 9 *Giovani e Adulti: prove d’ascolto*. Atti del Convegno svoltosi a Sansepolcro il 5 e il 6 aprile 2002, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 2003
Q. n. 10 *Per un sistema formativo integrato. Scuola dell’autonomia ed Enti local. ,* Seminario svoltosi ad Arezzo il 24 gennaio 2003, L’Artistica, Lama, 2003
Q..n. 11 Luisanna Alvisi Fabbri, *Ragazza Ebrea*, Musical in 1 atto, con un saggio sull’identità ebraica di R.G. Salvadori e una testimonianza di Angelica Livné Calò, L’Artistica, Lama, 2004
Q. n. 12 Vittorio Gazerro, *Insegnare lingua italiana. Plurilinguistmo in contesti multimediali. Il caso Svizzera,* L’Artistica, Lama, 2004
Q. n. 13 *Ecologia del paesaggio,* a cura di Massimo Barbagli, L’Artistica, Lama, 2004
Q. n. 14 Enzo Papi, *Insegnare per educare. Il mondo in classe*, L’Artistica, Lama, 2005
Q. n. 15 *Orientare perché*, a cura di Matteo Martelli, L’Artistica, Lama, 2005
Q. n. 16 *Mario Pancrazi, Fra Luca Pacioli e il fascino delle «matematiche»* a cura di Francesco Buttazzi, L’Artistica, Lama, 2005

VARIE

1. *Una testimonianza per Piero.* Annuario del Liceo Scientifico “Piero della Francesca”, a.s. 1990/1991, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 1991
2. *Progetto Giovani ’93. Un foglio in libertà alla ricerca di interpreti*, ITC “Fra Luca Pacioli”, a.s. 1991/1992, L’Artistica, Lama, 1992
3. *Nello spazio d Piero,* a c. di Pino Nania, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 1993
4. *Seminarium,* Annuario dell’ ITC “Fra Luca Pacioli”, a.s. 1993/1994, L’Artistica, Lama, 1994
5. *PEI – ANNUARIO*, Liceo Scientifico “Piero della Francesca”, a.s. 1994/1995, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 1995
6. 1947 – 1997, *Cinquant’anni di Liceo Scientifico Statale in Sansepolcro*, a.s. 1996/1997, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 1997
7. *Il diploma e poi*? Atti del Convegno sul post-diploma tenutosi a Sansepolcro l’11 e il 12 aprile 1997, L’Artistica, Lama,1998
8. *Regolamento d’Istituto - Liceo “Città di Piero”,* Compugraf, Sansepolcro, 2000; L’Artistica, Lama, 2003
9. *Carta dei Servizi - Liceo “Città di Piero”,* Compugraf, Sansepolcro, 2000; L’Artistica, Lama, 2003
10. *Cinquant’anni di liceo a Sansepolcro*. Annuario del Liceo “Città di Piero”, a.s. 2003/2004, L’Artistica, Lama, 2004
11. “Bibliomedia”, nn. 0,1,2,3,4,5,6 – CTS Grafica, Cerbara Città di Castello (PG). 2001-2002-2003-2004-2005.
12. *Le ragioni della memoria. Viaggio ad Auschwitz,* a cura di Matteo Martelli, Stab. Arti Grafiche, Sansepolcro, 2005